AUTORES

Coordinadores:

Borrás Rocher, Fernando
Botella Beviá, Federico
Calvo Calabuig, Roland
Devesa Botella, Antonio Francisco
Segura Heras, José Vicente

Autores:

Abelenda Lombardo, Maria del Pilar
Antón Felanich, Francisco
Belda Albero, Mª Teresa
Beneyto i Vañó, Joaquim B.
Cantó Esquembre, Mª Carmen
Casanova Alberola, Francisco
Fabra Molera, Moisés
Enseñat Fernandez, Nuria
Espinar Frías, Pedro Antonio
Frías Fernández, Cristina
Garcés Moret, Marcelino
Gil Poveda, Manuel
Izquierdo Hortelano, Diana
López Juárez, Fernando
Maldonado García, Mª Carmen
Martínez Boix, José Manuel
Pascual Bartolomé, Ángela
Rodríguez Rubio, Mª Isabel
Sanz García, Raquel
Toledo Melero, Francisco Javier
Úbeda Müller, Juan
Vera García, Gemma

Subvencionado por:

Terra Mítica

Colaboran:

Centro de Investigación Operativa de la Universidad
Miguel Hernández de Elche.
Centro de Formación, Innovación y Recursos Educativos
de Elche (CEFIRE).

Aprende Jugando
PROGRAMA ESCOLAR

EGIPTO

FICHAS DE TRABAJO. ÍNDICE DE CONTENIDOS		
ACTIVIDAD	**BLOQUE**	**CONTENIDOS**
1. El volumen de la pirámide	-Geometría	-Volúmenes
2. El paseo de la musaraña	-Geometría	-Problemas métricos
3. Los tensadores	-Álgebra	-Números reales
4. ¡Qué fracción!	-Álgebra	-Números reales
5. Las fracciones egipcias y la electrónica	-Álgebra	-Números reales
6. El constructor de pirámides	-Geometría	-Trigonometría
7. Cómo calcular la altura de las pirámides	-Geometría	-Trigonometría
8. Las inundaciones	-Funciones	-Interpolación lineal
9. El gran matemático egipcio	-Geometría	-Trigonometría
10. ¡Menudo reparto!	-Aritmética y álgebra	-Suma de los términos de una progresión

1. EL VOLUMEN DE LA PIRÁMIDE

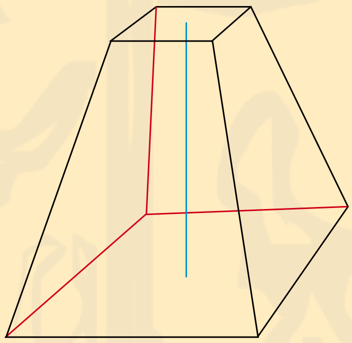
Aunque te vamos a proponer actividades específicas como alumno de Bachillerato, te recomendamos que leas, previamente, las que hemos propuesto a los alumnos de Secundaria, tanto de primer como de segundo ciclo. Encontrarás información de todo tipo y ayuda para resolver tus ejercicios.

Como prueba de esta relación, busca en las actividades para segundo ciclo la propuesta que hicimos para calcular el volumen de un tronco de pirámide, utilizando el método egipcio. Ahora, vamos a ir un poco más lejos y te vamos a proponer que aproveches el algoritmo egipcio para deducir la fórmula de este volumen, a partir del ejemplo proporcionado por el papiro. Te recuerdo que aparece del siguiente modo en el problema 14 del papiro de Moscú:

Ejemplo de cálculo del volumen de una pirámide truncada.

Si te dicen: Una pirámide de 6 de altura por 4 de base (el cuadrado inferior) por 2 de arriba (el cuadrado superior), que es resuelto mediante una serie de pasos sucesivos:

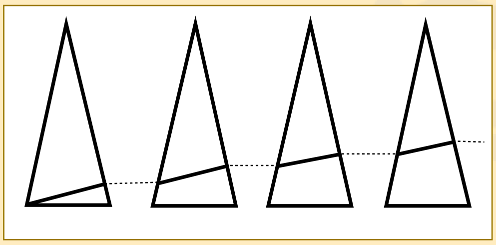
- **Haces el cuadrado de este 4; el resultado es 16.**
- **Es el doble de 4 [multiplicar 4 por 2]; el resultado es 8.**
- **Haces el cuadrado de este 2; el resultado es 4.**
- **Añades el 16 y el 8 y el 4; el resultado es 28.**
- **Tomas la tercera parte de 6; el resultado es 2.**
- **Tomas 28 dos veces; el resultado es 56.**
- **Fíjate, [el volumen] es 56. Encuentras [que esto es] correcto.**



1.1. Fijándote en como lo hacían los egipcios deduce la fórmula del volumen de la pirámide truncada, llamando "a" al lado de la base mayor, "b" a la base menor y "h" a la altura.

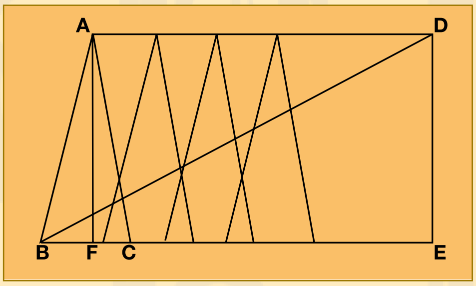
2. EL PASEO DE LA MUSARA—A

Seguimos con las pirámides egipcias para daros a conocer un curioso problema extraído de Internet. Cuentan que, siendo faraón Amenofis IV, en uno de los monumentos funerarios menores, una **musaraña** complicó la vida de los sabios oficiales. Un día, al parecer, el pintoresco **bichejo** se decidió a comprobar el camino que recorrería para llegar al vértice superior de esta pequeña pirámide. En lugar de subir en línea recta pensó que sería más cómodo partir de un vértice de la base de aquella pirámide regular, y seguir una trayectoria perpendicular al lado opuesto, tal como se muestra en la figura, sin parar hasta alcanzar la cima. Las caras laterales de la pirámide eran triángulos isósceles de 4,5 m. de base y 6,2 m. de altura.



El faraón, curioso, quiso saber, para transmitírselo a sus súbditos, el total del camino recorrido por la singular musaraña. Reunió a sus escribas más sabios y les planteó la pregunta, ¿cuál es la longitud recorrida por el pequeño roedor?

2.1. Resuelve la cuestión planteada anteriormente. Como ayuda te recomendamos que te apoyes en este dibujo y en el hecho de que los triángulos DEB y CFA son semejantes.

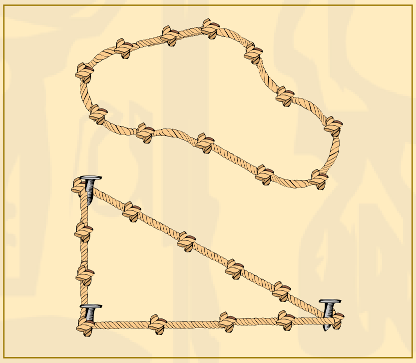


3. LOS TENSADORES

Como seguramente sabes, todo giraba alrededor del río Nilo, éste regaba los cultivos de la zona y permitía que se navegara sobre él. Lo que quizá no sepas es que el Nilo, en su época de crecida, inundaba los terrenos próximos, lo que era fundamental para la fertilidad de las tierras, pero hacía que al descender el nivel de las aguas las delimitaciones de los terrenos quedasen desdibujadas. Así, cada vez que bajaba el nivel de las aguas había que volver a marcar el terreno particular de cada propietario. De ello se encargaban los "tensadores de cuerda", como los llamó Herodoto.

De esta manera, fueron apareciendo distintos instrumentos de medición, a la vez que descubrían métodos para calcular el área (en ocasiones aproximada) de algunas figuras geométricas muy conocidas. Por ejemplo, los problemas 6 y 7 del papiro de Rhind y de Moscú hablan de cómo calcular el área de un triángulo y de un rectángulo concretos, respectivamente.

Si bien la forma de medir los terrenos se ha perfeccionado, se conserva la palabra que significa "medir la tierra" y que ahora se utiliza para designar una parte de las Matemáticas que se ocupa de estudiar las figuras y cuerpos que se pueden trazar en el espacio. La palabra la utilizas desde hace tiempo, ¿adivinas cuál es? Pues sí, es Geometría.



Estos "tensadores" utilizaban cuerdas de doce nudos que al tensarlas marcaban líneas perpendiculares sobre el suelo, ya que formaban un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5. Sin embargo, se pueden construir otros triángulos rectángulos que proporcionen líneas perpendiculares, únicamente han de cumplir la misma relación que cumple el de la figura y es $3^2 + 4^2 = 5^2$. A las ternas de números a, b y c que cumplen que $a^2 + b^2 = c^2$ se les llama ternas Pitagóricas y si construimos un triángulo con los lados de longitud a, b y c, será un triángulo rectángulo.

3. LOS TENSADORES

3.1. ¿Eres capaz de encontrar otras ternas pitagóricas y ser un buen tensador?

Además de los números 3, 4 y 5 existen infinidad de números enteros y positivos **a**, **b**, **c** que satisfacen la relación $a^2 + b^2 = c^2$. A continuación, vamos a esbozar el desarrollo de un algoritmo que nos da ternas pitagóricas sin necesidad de ir probando.

Para empezar, consideremos tres números pitagóricos que sean primos entre sí (los demás se hallan multiplicándolos por cualquier factor entero p). De la propia igualdad $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$, despejando y utilizando la fórmula de diferencia de cuadrados, obtenemos, $\mathbf{a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)}$, donde los factores $\mathbf{c + b}$ y $\mathbf{c - b}$ son primos entre sí, como consecuencia de la hipótesis inicial. Pero si el producto de dos números primos entre sí es un cuadrado, entonces, cada uno de ellos será un cuadrado, es decir, $\mathbf{a^2 = (c + b)(c - b) = m^2 * n^2}$, con lo cual:

$$a = mn \qquad b = \frac{m^2 - n^2}{2} \qquad c = \frac{m^2 + n^2}{2}$$

donde m y n son números impares primos entre sí. Por ejemplo, para m = 7 y n = 3 se obtiene $21^2 + 20^2 = 29^2$.

3.2. Da valores a **m** y **n** para formar otros números pitagóricos.

Es evidente que si **a**, **b**, **c** son un trío de números pitagóricos, los números **pa**, **pb**, **pc** (donde p es un factor entero) serán también números pitagóricos. Y al contrario, si los números de Pitágoras tienen un factor común, pueden ser simplificados por éste, obteniéndose de nuevo el grupo de números pitagóricos.

4. ¡QUÉ FRACCION!

¿Cómo utilizaban las fracciones? El uso de fracciones que hacían los egipcios es bastante curioso y elaborado. Éstas siempre tenían de numerador el 1 y de denominador cualquier número entero mayor de 1. No tenían notación para escribir fracciones que no fueran del tipo anterior, a excepción, de las fracciones 2/3 y 3/4. Como ves, cualquier otra fracción que podamos usar ahora no tenía sentido para ellos. Así, 2/5 en su concepción aritmética era representada como 1/3 + 1/15, tal como se recoge en el papiro de Rhind. Los sumandos siempre eran diferentes, nunca 1/5 + 1/5. Puede parecer una representación poco útil y rebuscada, pero quizá se base en el concepto de fracción como la división de un todo en n partes. No se sabe exactamente el método que usaban para conseguir esta descomposición, pues no es única.

4.1. De hecho, ya hemos propuesto tres descomposiciones diferentes para la fracción 3/4, en las actividades de segundo ciclo, a saber, $3/4 = 1/2 + 1/4 = 1/2 + 1/5 + 1/n = 1/2 + 1/6 + 1/n$. Obtén el valor de n e intenta encontrar otras representaciones diferentes de 3/4 como suma de fracciones egipcias.

5. LAS FRACCIONES EGIPCIAS Y LA ELECTRÓNICA

En la actualidad, podemos encontrar aplicaciones a esta forma de expresar las fracciones. Por ejemplo, resultaría muy sencillo comparar fracciones y decidir cuál es mayor si aparecen expresadas como suma de **fracciones egipcias**. Vemos, claramente, que 4/5 es mayor que 3/4 si comparamos sus respectivas descomposiciones.

$$3/4 = 1/2 + 1/4$$
$$4/5 = 1/2 + 1/4 + 1/20$$

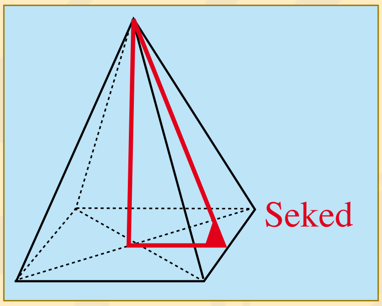
La aplicación te puede parecer un poco artificial, ya que, actualmente el uso de calculadoras facilita este tipo de comparaciones. Lee atentamente el siguiente enunciado y descubrirás otra interesante aplicación.

5.1. Como ya sabrás por otras asignaturas, cuando tenemos un circuito eléctrico podemos agrupar las resistencias en serie o en paralelo. Nos interesan los circuitos en paralelo. La resistencia equivalente de un circuito en paralelo de n resistencias está dada por la expresión: $1/R_{\text{equivalente}} = 1/R_1 + 1/R_2 + \dots\dots\dots + 1/R_n$. ¿Te recuerda algo? Efectivamente, tenemos de nuevo las **fracciones egipcias**. Las resistencias comerciales están formadas por la unión de 12 resistencias estándar y sus múltiplos de 10. Son las llamadas series E12, que tienen los siguientes valores (también existe la serie E24):

10	12	15	18	22	27	33	39	47	56	68	82
100	120	150	180	220	270	330	390	470	560	680	820
1000	1200	1500	1800	2200	2700	3300	3900	4700	5600	6800	8200

Supongamos que quieres construir tres circuitos, cada uno de ellos debe tener las siguientes resistencias: 6, 20 y 30. ¿Encuentra para cada uno de estos circuitos la combinación de resistencias de la serie E12 más barata? (NOTA: supondremos que la combinación más barata es aquella que utilice un menor número de resistencias).

6. EL CONSTRUCTOR DE PIRÁMIDES



Aunque no se puede hablar de una trigonometría egipcia, parece obvio que unos ciertos conocimientos sí debían tener. Cómo, si no, levantar sus pirámides sin estos mínimos conocimientos. Los problemas 56 a 60 del papiro de Rhind tratan sobre pendientes, alturas y bases de pirámides. Un problema básico en la construcción de una pirámide es mantener la misma inclinación para las cuatro caras de la misma, ya que, en caso contrario, podrían no converger en un único vértice. Los egipcios expresaban esta pendiente mediante el cálculo de una razón llamada **seqt**, que se corresponde con la inversa de nuestra actual tangente, lo que llamamos cotangente. En la práctica se valdrían de triángulos maestros que aplicarían a las caras laterales para mantener su inclinación inicial.

El **seqt** es, por tanto, la forma en que los antiguos egipcios median la pendiente de una superficie inclinada. Equivaldría, exactamente, a nuestra cotangente, si utilizasen la misma unidad en vertical y en horizontal, pero en mediciones verticales utilizaban como unidad de medida el **codo** (distancia desde el codo a la punta de los dedos que equivalía a 0,523 metros) y en horizontales el **palmo** (1 codo = 7 palmos). De esta manera, expresaban el seqt en palmos por codo.

6.1. Resuelve, para empezar, el problema 56 del papiro de Rhind: **Cuál es el seqt de una pirámide de 250 codos de altura y 360 codos de lado en la base**. Con este dato y la ayuda de tu calculadora obtén el ángulo de inclinación de la pirámide.

6.2. Expresa mediante un algoritmo la obtención del **seqt** para una pirámide cuyas medidas vengan expresadas en metros. Resume en una fórmula el algoritmo anterior. Recuerda que el **seqt** viene expresado en **palmos** por **codos**.

6.3. La gran pirámide de Keops tiene base cuadrada de lado 230 m. y cada una de las aristas mide 218,5 m. Calcula el **seqt** de esta pirámide, su ángulo de inclinación y su volumen. Para hacerte una idea de su tamaño calcula el número de bloques cúbicos de piedra de 2 m. de lado, necesarios para rellenarla totalmente.

7. CÓMO CALCULAR LA ALTURA DE LAS PIRÁMIDES

Sin embargo, el problema básico con el que se enfrentaban era el de calcular la altura de la pirámide que iban a construir. Disponían del lado de la base y del seqt que iban a emplear. Con estos datos podían calcular, previamente, la altura que alcanzaría dicha pirámide. A modo de ejemplo, te presentamos este proceso que aparece en el problema 59 del papiro de Rhind: **Si construyes una pirámide cuyo lado de la base es 12 (codos) y con un seqt de 5 palmos y 1 dedo, ¿cuál es la altura?**

- Multiplica por dos el seqt con el objeto de considerar la base entera, $2x5\frac{1}{4}$, puesto que un palmo equivale a cuatro dedos.

- Divide 6 entre $10\frac{1}{2}$ para reducir a la relación entre las mismas unidades, $6:10\frac{1}{2} = b$

- Esta cantidad se multiplica por el lado de la base, bx12 = 8 codos.

7.1. Aunque el resultado final es correcto, hemos introducido un error en el proceso, ¿eres capaz de descubrirlo? Revisa el planteamiento y los conceptos empleados en la resolución.

8. LAS INUNDACIONES

Cada año, en el mes de Junio, como consecuencia del deshielo de las cumbres de los "Montes de la Luna" (origen del río Nilo), comenzaban las inundaciones. Éstas hacían que en algunos lugares, como en las gargantas de las primeras cataratas, se pudieran observar aumentos de caudal de entre 6 y 8 metros. Los egipcios aprendieron a predecir la cantidad de cosecha según la altura que alcanzaba el agua en dichas gargantas. Si era menor de 6 metros no se anegarían suficientes terrenos para obtener alimentos para toda la población. Si la crecida era superior a 8 metros el agua llegaba hasta los poblados y los destruía.

8.1. Imaginemos que con una crecida que alcanzase los 6 m. sobre el nivel normal del Nilo se obtuviese una cosecha que alimentara a 200.000 personas; y que si se alcanzasen los 8 m. se obtuviesen alimentos suficientes para 600.000 personas. Utiliza la interpolación lineal para predecir la cantidad de personas que podrían comer si la crecida fuese de 7,5 m.

8.2. Utiliza la interpolación lineal para predecir cuantos egipcios podrían alimentarse si el Nilo subiese 9 m. sobre su nivel normal en la primera catarata.
¿Es fiable esta predicción? ¿Por qué?

9. EL GRAN MATEMÁTICO EGIPCIO

El matemático más conocido nacido en una ciudad egipcia es **Claudio Ptolomeo**. Nació en una ciudad del Alto Egipto (Ptolemais Hermiu) hacia el año 100 de nuestra era y falleció en Alejandría 70 años después. En esa época, Egipto ya había sido ocupado, años atrás, por los romanos, tras el suicidio de Cleopatra. Ptolomeo fue un destacado astrónomo y geógrafo. Su doctrina, que abarca muchos campos del saber, fue expuesta en trece libros que llamó **Gran composición matemática**, pero que recibió de los traductores árabes el título consagrado de **Almagesto**. Ningún escrito de la Antigüedad tuvo un éxito comparable a la obra de Ptolomeo, cuyos principios permanecieron indiscutidos hasta el Renacimiento.

9.1. Utiliza Internet o busca en una enciclopedia más datos acerca de este sabio y de su **Almagesto**. Averigua cuál fue su relación con la Trigonometría.

10.¡MENUDO REPARTO!

Por otra parte, el problema de progresiones más antiguo no es el de la recompensa al inventor del ajedrez, que tiene ya más de dos mil años, sino otro mucho más viejo, repartición del pan, registrado en el papiro de Rhind: **Entre cinco personas se repartieron cien medidas de trigo, de tal suerte que la segunda recibió más que la primera tanto como le correspondió a la tercera más que a la segunda, a la cuarta más que a la tercera y a la quinta más que a la cuarta. Además, las dos primeras obtuvieron siete veces menos que las tres restantes. ¿Cuánto correspondió a cada una?**

10.1. Es evidente que las cantidades de trigo distribuidas entre los cinco participantes en el reparto constituyen una progresión aritmética. Resuelve el reparto mediante un sistema de ecuaciones.

Aparecen otros problemas relacionados con progresiones. Entre ellos, el problema 79, el único sobre progresiones geométricas en el Antiguo Egipto que nos es conocido, además del primer ejemplo de matemática recreativa del que se tiene noticia. Se trata de una progresión geométrica en la que el primer término es 7 y la razón también 7. En el problema se dice, en traducción libre: **Había una propiedad compuesta por siete casas; cada casa tenía siete gatos; cada gato se comía siete ratones; cada ratón se comía siete granos de cebada; cada grano había producido siete medidas. ¿Cuánto sumaba todo esto?** El escriba obtiene la suma de todos los términos de la progresión, aunque éste no parece un objetivo lógico.

10.2. Utiliza la fórmula apropiada para obtener tú también esta cantidad.

GRECIA

FICHAS DE TRABAJO. ÍNDICE DE CONTENIDOS		
ACTIVIDAD	**BLOQUE**	**CONTENIDOS**
1. Un gran geómetra: Euclides	-Geometría	-Historia
2. Teorema de Thales	-Geometría -Aritmética	-Historia -Aplicación del teorema
3. Aunque te llamen beta eres alfa	-Geometría	-Proporcionalidad, semejanza
4. Medidas de capacidad	-Álgebra	-Sistema de ecuaciones
5. El terreno de Cleómedes	-Álgebra	-Programación lineal
6. ¿Un número de oro?	-Geometría -Aritmética	-Construcción intuitiva del número áureo -Presencia del número áureo
7. Arquímedes y la Pirámide de Keops	-Geometría	-Áreas y volúmenes
8. El curioso de Arquestrato	-Geometría	-Semejanza en el plano -Semejanza de triángulos
9. Busca en esta sopa matemática	-Vocabulario matemático	-Crucigrama
10. Los Juegos Olímpicos	-Análisis -Estadística	-Funciones a trozos -Estadística descriptiva

1. UN GRAN GEÓMETRA: EUCLIDES

Euclides es, sin lugar a dudas, el Matemático más famoso de la antigüedad y quizás el más nombrado y conocido de la historia de las Matemáticas.

Vivió en Alejandría (Egipto), en torno al año 300 a.C. Allí fundó una escuela de estudios matemáticos. Por otra parte, también se dice que estudió en la escuela fundada por Platón.

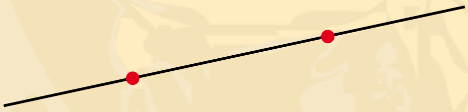
Su obra más importante es un tratado de geometría que recibe el título de **"Los Elementos"** que contiene trece libros sobre geometría y aritmética.

"Los Elementos" ha tenido más de 1.000 ediciones desde su primera publicación en 1482. Esta obra es importante por la sistematización, el orden y la argumentación con la que está constituida. Euclides recopila, ordena y argumenta los conocimientos geométrico-matemáticos de su época con una perfección tan extraordinaria que su obra se mantuvo en muchos lugares como libro de texto hasta el siglo XIX.

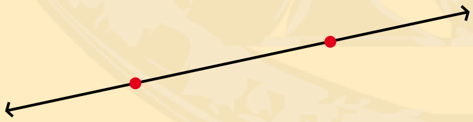
Euclides construye su argumentación basándose en un conjunto de **"axiomas"**, principios o propiedades que se admiten como ciertas por ser evidentes, que Euclides llamó **postulados**.

Los famosos cinco postulados de Euclides, que ofrecemos a continuación, son:

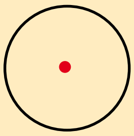
I.- Dados dos puntos se pueden trazar una recta que los une.



II.- Cualquier segmento puede ser prolongado de forma continua en una recta ilimitada en la misma dirección.

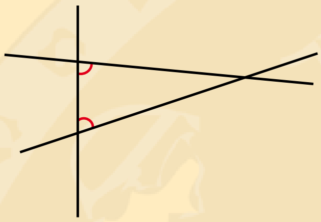


III.- Se puede trazar una circunferencia de centro en cualquier punto y radio cualquiera.



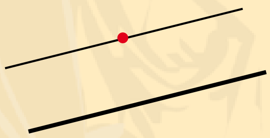
IV.- Todos los ángulos rectos son iguales.

V.- Si una recta, al cortar a otras dos, forma los ángulos internos de un mismo lado menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.



Este axioma es conocido con el nombre de **axioma de las paralelas** y también se enunció más tarde así:

V-. Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela.



Este axioma, que al parecer no satisfacía al propio Euclides, ha sido el más controvertido y dio pie en los siglos XVIII y XIX al nacimiento de las geometrías no euclídeas.

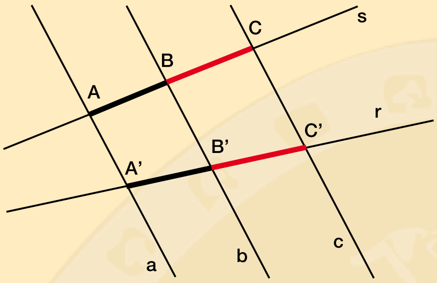
Para acabar podemos citar un par de anécdotas que nos ilustrarán, aún más, sobre la vida y gestos de Euclides:

En una ocasión, el rey Ptolomeo preguntó a Euclides si había un camino más breve que el que él utilizaba en "Los Elementos" para estudiar Geometría, él respondió que no existen caminos "reales" en la geometría. Con este juego de palabras, Euclides le vino a decir al rey que no existen privilegios en la geometría.

En otra ocasión, uno de sus estudiantes preguntó a Euclides qué ganaba con lo que había aprendido de la geometría: El maestro ordenó a su esclavo que le entregase una moneda (óbolo) a aquel estudiante, para que "ganara" algo con lo que aprendía de geometría, dando a entender que aquel muchacho no había entendido nada de la grandeza de la geometría y de lo desinteresado de ésta.

2. TEOREMA DE THALES

Si las rectas a, b, c son paralelas y cortan a otras dos rectas r y s, entonces los segmentos que determinan en ellas son proporcionales.



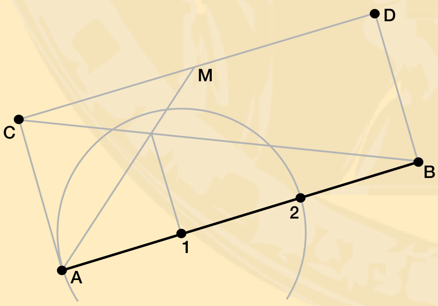
Se atribuye a Thales de Mileto el enunciado de varias propiedades de geometría elemental.

1. Todo círculo queda dividido en dos partes iguales por su diámetro.
2. Los ángulos adyacentes a la base en un triángulo isósceles son iguales.
3. Los ángulos opuestos por el vértice que determinan dos rectas secantes son iguales.
4. Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno de ellos son iguales a los de otro triángulo, ambos triángulos son congruentes.
5. El ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

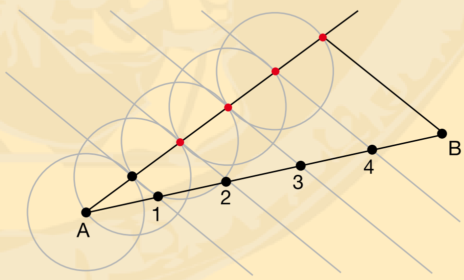
Normalmente, por Teorema de Thales, se entiende el que se ha enunciado aquí.

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN PARTES IGUALES

División en 3 partes iguales



División en un número cualquiera de partes



Te proponemos estos ejercicios de aplicación:

a) Dividir geométrica y analíticamente el segmento $\overline{AB}$ = 25 cm. en cuatro partes iguales.

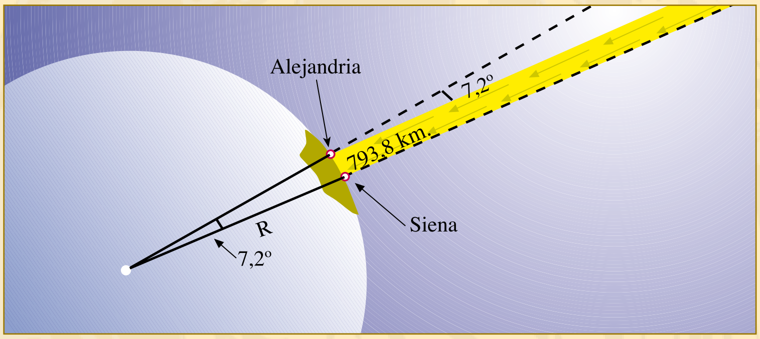
b) Dividir este mismo segmento en tres partes iguales (utiliza como base el dibujo anterior).

3. AUNQUE TE LLAMEN BETA ERES ALFA

Eratóstenes vivió en Alejandría en el siglo III, a.C. Sus contemporáneos le llamaban “Beta”, porque al igual que la segunda letra del alfabeto, a este personaje se le reconocía por ser el segundo mejor en casi todo. Y nunca el primero.

Entre los resultados astronómicos más importantes destaca su medición con mucha precisión del radio de la Tierra.

Eratóstenes conocía el hecho de que en la ciudad de Sirene en Egipto (actualmente Assuan) el día que comienza el verano (21 de Junio) a mediodía, los objetos no proyectaban sombra alguna porque los rayos del Sol caían perpendicularmente. Sin embargo, en la ciudad de Alejandría situada más al Norte, el Sol formaba con la vertical un ángulo que era 1/50 del ángulo completo (360°).



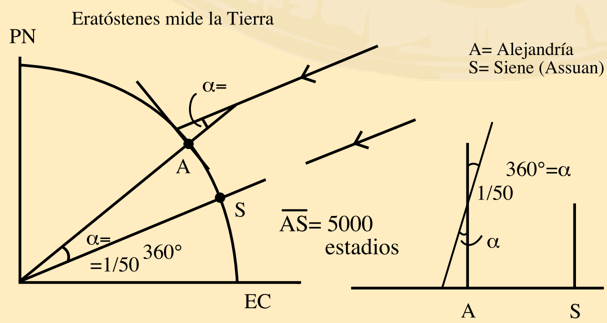
Se procedió a determinar la diferencia de latitud entre las dos ciudades, ángulo que se calcula empleando dos instrumentos semiesféricos llamados escafos, en el centro de cada uno de los cuales había una estaca llamada estilo o nomon. Estos instrumentos se colocaron tanto en Sirene como en Alejandría. Era claro que el comportamiento diferente de las sombras se debía a que la Tierra no era plana y las verticales de los dos lugares no señalaban la misma dirección, sino que formaban un ángulo de 360/50 = 7,2°. Eratóstenes mandó medir la distancia entre las dos ciudades que resultó ser de 5.000 estadios (1 estadio ≈ 157,6 m.).

3.1. Con estos datos, el dibujo que abajo te damos y el método que consideres apropiado, calcula:

a) La distancia de Sirene a Alejandría.

b) El perímetro de la Tierra.

c) Su radio.



4. MEDIDAS DE CAPACIDAD

Cleomedes de Alejandría va todos los días al mercado a vender aceite.

Cierto día dejó anotado todo lo que vendió a siete personas distintas, y nosotros al encontrarlo, nos hemos empeñado en pasar estas unidades a litros. He aquí los resultados:

100 cotilas = 27 litros
100 ciatos + 2 oxibafes +1 hemixión + 1 cous = 9,496 litros
2 cous+ 3 hemixión + 10 ciatos = 37,35 litros
2 ánforas = 1 metreto
4 hemixión + 200 ciatos + 3 cous = 25,2 litros
10 cous + 5 oxifarmes + 10 ciatos + 3 hemixión = 38,05 litros
1 metreto = 144 cotilas

Pero ahora no recordamos cual era la equivalencia en litros de cada unidad.

Lógicamente esto es lo que te pedimos (afortunadamente puedes utilizar los recursos matemáticos que conozcas para resolver este SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES).

Comprueba los resultados en la siguiente página.

Las **MEDIDAS DE CAPACIDAD** variaban en función de si eran de líquidos o de sólidos. En el sistema ático de Solón, la unidad común era la cotila (kotu'lh), de 0,270 litros. En una época baja, se adoptó un sistema nuevo en el que la cotila valía 4 1/2 ciatos (kua'qoV), que corresponde a 0,204 litros.

4. MEDIDAS DE CAPACIDAD

SISTEMA DE SOLÓN			SISTEMA NUEVO		
		= litros			= litros
kua'qoV (ciato)		0,045	....	....	0,045
o1xu'bafov (oxibafe)	1,5 ciatos	0,068	....	....	0,068
kotu'lh (cotila)	6 ciatos	0,270	kotu'lh (cotila)	4,5 ciatos	0,204
h2micooV (hemixion)	6 cotilas	1,62	h2mina (hemina)	6 ciatos	0,272
cou←V (cous)	12 cotilas	3,24	xe'sthV (gestes)	9 ciatos	0,409
a1mforeu'V (ánfora)	0,5 metreta	19,44	h2micooV (hemixion)	8 cotilas	1,637
metrhth'V (metreto)	144 cotilas	38,88	cou←V (cous)	16 cotilas	3,275
			metrhth'V (metreto)	192 cotilas	39,294

SISTEMA DE SOLÓN			SISTEMA NUEVO		
		= litros			= litros
kotu'lh (cotila)		0,27	....	....	0,205
coi←nix (quenice)	4 cotilas	1,08	....	6 cotilas	1,228
h2mi'ekton (hemiecto)	16 cotilas	4,32	....	24 cotilas	4,912
e2kteu'V (hecteo)	32 cotilas	8,64	....	48 cotilas	9,824
me'dimnoV (medimno)	192 cotilas	51,84	....	288 cotilas	58,941

En los otros sistemas, su capacidad variaba según el valor del pie; en el sistema de Egina valía 35,3 litros. En Esparta, el medimno valía 74 litros y el cous 4,62 litros.

5. EL TERRENO DE CLEOMEDES

MEDIDAS EN LA ANTIGUA GRECIA

En Grecia, la primera unidad de medida de longitud era el pie (pou’V), que variaba en los diferentes estados, el que prevaleció fue el pie ático soloniano, medía 0,296 m.

Una antigua medida que seguía en vigor era el pie egineta (de la isla de Egina), de 0,328 m.; y, en las carreras el estadio olímpico de 192,27 m. El pie de Filetero, empleado sobre todo en Pérgamo y otras ciudades babilónicas, 0,495 m.; el estadio romano, 8 de los cuales hacen una milla romana, medía 185 metros; el estadio ptolemaico (7 estadios = 1 milla romana) equivalía a 210 m. La parasanga, 5.940 metros.

MEDIDAS DE LONGITUD ÁTICAS:

MEDIDAS ORDINARIAS	= dedos	= pies	= metros
da’ktuloV (dedo)		1/16	0,018
kónduloV (cóndylo)	2	1/8	0,037
palaisth’, dw←ron (palmo o doron)	4	1/4	0,074
h1mipo’dion, dica’V (semipie)	8	1/2	0,148
spiqamh’ (pulgar)	12	3/4	0,222
pou’V (pie)	16		0,296
pugmh’ (puño)	2 d + 1 pie	9/8	0,333
pugw’n (brazo)	4 d + 1 pie	5/4	0,370
ph←cuV (codo)		1,5	0,444
o1rguia’ (braza, toesa)		6	1,776

MEDIDAS ITINERARIAS		= pies	= metros
bh←ma a1plou←n (paso)		2,5	0,74
ple’qron (pletro)		100	29,60
sta’dion (estadio)	=100 brazas	600	177,60

5. EL TERRENO DE CLEOMEDES

MEDIDAS DE SUPERFICIE		= áreas	= metros
tetra'gwnoV pou'V (pie cuadrado)			0,87
a5kaina (pértica cuadrada)	=100 pies^2		8,76
ple'qron (pletro, fanega)	=1.000 pies^2	8,70	870

MEDIDAS AGRARIAS	= pies	= metros
pou'V (pie)		0,296
o1rguia' (braza, toesa)	6	1,776
a5kaina, ka'lamoV (pértica, caña)	10	2,960
a7mma1 (cadena de agrimensor)	60	17,760
ple'qron (pletro)	100	29,600

Te planteamos ahora un pequeño ejercicio para que practiques lo que acabas de leer:

Cleómedes está hecho un lío.
Quiere comprarse un terreno un poco especial que tiene que cumplir estas condiciones:

a) Tener alguna fanega (¡faltaba más!).
b) Tener algún pie (aunque sea para la caseta del perro).
c) El número de pies menos el de fanegas debe ser menor o igual a 2.
d) El número de fanegas más el doble de pies no debe ser mayor que seis.
e) El doble de fanegas más los pies debe ser menor o igual a seis.

Quiere saber el número máximo de fanegas y pies que cumplen esta condición (función objetivo = fanegas + pies).

Pero una vez que sepa cuántas fanegas y pies se ha comprado, yo quiero saber a cuántos m^2 equivalen.

6. ¿UN NÚMERO DE ORO?

La geometría, según cuentan los historiadores, nace a orillas del río Nilo. El faraón obligaba a pagar los tributos proporcionalmente a la extensión de las tierras de cada propietario. La medida de áreas, distancias y ángulos favoreció al desarrollo de técnicas que supuso el inicio de un proceso de abstracción donde se consideraban líneas y gráficos y donde las distancias lineales y angulares podían ser tratadas matemáticamente.

Fueron los griegos quienes sistematizaron y formalizaron esas estructuras, descubriendo propiedades curiosas entre las que se encuentra el número FI (Φ). El valor de tal número es 1,61803... y su nombre se debe a la inicial del nombre del escultor griego Fidias (siglo V a.C., autor del friso y del frontis del Partenón).

Definimos la "**sección áurea**" como la división armónica de un segmento en media y extrema razón. Es decir, que el segmento menor es al segmento mayor, como éste es a la totalidad.

Cuestiones:

6.1. Expresa esta relación con un segmento de longitud 1. Encuentra la proporción. Plantea la ecuación de segundo grado y resuélvela. ¡Has encontrado el número áureo!

6.2. Construye el "rectángulo áureo", rectángulo cuyos lados están en proporción áurea. Para ello deberás aplicar el teorema de Pitágoras.
Ejemplos de rectángulos áureos los podemos encontrar en las tarjetas de crédito, DNI, tarjetas de visita, diferentes tamaño papel estándar (A4, A3,...),...

6.3. La sucesión de Fibonacci.
Considera la sucesión numérica definida de la forma:
$a_1=1$, $a_2=1$, $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$ para $n \rightarrow 2$

Se trata de una sucesión recurrente. Construye los primeros veinte términos de la sucesión.

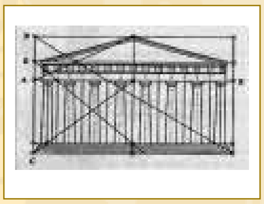
Calcula: $\lim \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$

"Si dividimos cada término de la sucesión entre su anterior, los cocientes sucesivos convergen hacia el número aúreo".

6. ¿UN NÚMERO DE ORO?

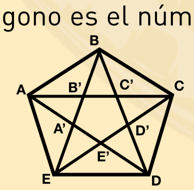
6.4. Investiga: Inventa secuencias numéricas donde los dos primeros términos de la sucesión son números naturales arbitrarios y el siguiente se obtiene como la suma de los dos anteriores; si realizamos el cociente entre un elemento de la sucesión y el anterior, obtenemos que los cocientes también convergen al número áureo.

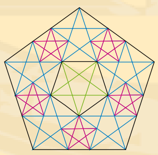
6.5. Presencia del número áureo
El Partenón fué construido en la cima de la Acrópolis, entre 447 y 432 a.C., por orden de Pericles. En el transcurso del tiempo, el edificio sufrió numerosas vicisitudes. En 1687, el Partenón fue transformado en polvorín por los ocupantes turcos. Durante el sitio de Atenas, una bala de cañón lanzada por atacantes venecianos provocó una explosión que lo redujo a ruinas. En la actualidad, el Partenón ha sido recompuesto y su peor enemigo es la contaminación que destruye sus milenarias piedras. Su alzado guarda la proporción del número áureo.



6.6. La Gran Pirámide de Keops, el cociente entre la altura de uno de los tres triángulos que forman la pirámide y el lado es 2Φ.
Conociendo este dato, ¿podrías obtener la altura de la pirámide en función de la longitud del lado?

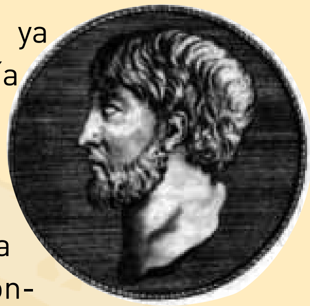
6.7. Pentágonos. Estrellas Pitagóricas.
El cociente entre la diagonal de un pentágono regular y el lado de dicho pentágono es el número áureo.





6.8. En la naturaleza encontramos innumerables ejemplos: crecimiento de las plantas, piñas, distribución de las hojas en un tallo, dimensiones insectos y pájaros, formación de caracolas.

7. ARQUÍMEDES Y LA PIRÁMIDE DE KEOPS



Varios siglos antes de nuestra Era, los babilonios ya sabían calcular, a partir de su perímetro, cuánto medía la superficie ocupada por un triángulo.

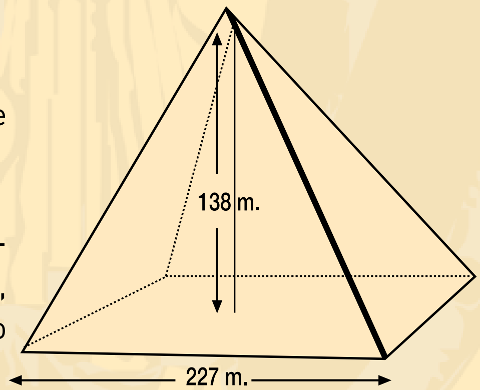
Arquímedes, sabio griego que murió en el año 221 a.C., descubrió la siguiente fórmula para calcular la medida de la superficie de cualquier triángulo, conocidas las longitudes de sus lados:

Medida de la superficie = $\sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}$

Algunos historiadores atribuyen esta fórmula a Heron.

Donde s representa la mitad del perímetro del triángulo y a, b y c las longitudes de los lados.

Te proponemos una aplicación práctica:

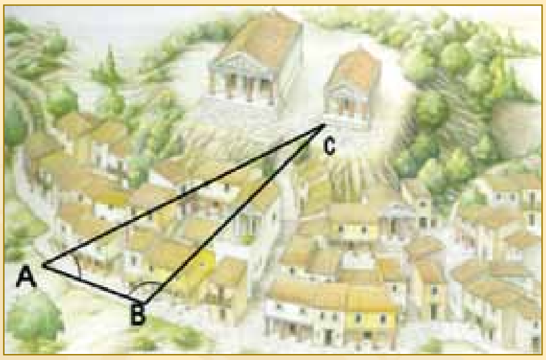


La pirámide de Keops tiene 138 m. de altura y 227 m. de lado.

a) Imagina que tienes que calcular cuántos m^2 tienen las caras de la pirámide, para saber aproximadamente cuánto mármol necesitarás.
Pista: utiliza la fórmula anterior para calcular la superficie triangular de una cara y luego lo multiplicas por cuatro.

b) Utiliza alguna otra fórmula de cálculo de superficie de un triángulo que conozcas para obtener el resultado pedido.

8. EL CURIOSO DE ARQUESTRATO



Desde la casa de Arquestrato, el célebre cocinero griego (A), se ve el templo (C). Arquestrato quiere averiguar a qué distancia se encuentra. Para ello hace lo siguiente:

- Busca un lugar, B, relativamente próximo a su casa, desde el cual se vea el templo (casualmente resulta ser la casa de la bella Perséfone).

- Mide los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{A}$ y la distancia $\overline{AB}$

  $\overline{AB}$ = 100 codos $\hat{A}$ = 60° $\hat{B}$ = 105°

- Construye, dibujándolo en el suelo, un triángulo A'B'C' semejante al ABC tomando:

  $\hat{A}'$ = 600 $\hat{B}'$ =105° (luego ABC y A'B'C' son semejantes).

- Toma el lado $\overline{A'B'}$ = 80 dedos con lo que la razón de semejanza es 1: ____________ (ojo, pasa los codos a dedos).

- Mide sobre su dibujo, con una regla, la longitud del lado $\overline{A'C'}$ = 298,56 dedos.

- Teniendo en cuenta la razón de semejanza, calcula $\overline{AC}$, ¿podrías calcularlo por otro método sin necesidad de construir un triángulo semejante? Da el resultado en dedos, pies y codos.

Nota:

1 dedo = 1/16 pie	
1 pie = 16 dedos	1 codo = 3/2 de pie

Utilizar el teorema del seno para resolverlo.

Aprende Jugando
PROGRAMA ESCOLAR

9. ¡BUSCA EN ESTA SOPA MATEMÁTICA!

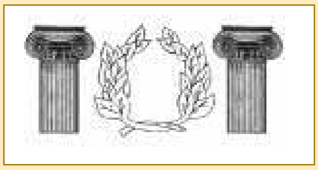
Dentro de esta sopa matemática hemos perdido algunas palabras que ya conoces, ¿puedes encontrarlas?:

D	A	M	I	E	C	U	A	C	I	O	N	E	S
E	S	A	A	V	C	D	T	A	I	P	C	E	N
T	L	T	M	D	O	A	C	L	O	U	P	L	E
C	I	R	C	U	N	F	E	R	E	N	C	I	A
M	M	I	C	O	I	R	R	O	E	T	A	P	D
N	I	Z	I	N	C	T	M	D	A	O	D	S	R
A	T	E	T	N	A	N	I	M	R	E	T	E	D
D	E	R	I	V	A	D	A	S	E	C	E	O	L
T	A	E	I	N	T	E	R	V	A	L	O	S	M

Para ello te vamos a dar algunas pistas:

1. Dos rectas secantes se cortan en un ...
2. La expresión: $(\mathbf{x} - \mathbf{a})^2 + (\mathbf{y} - \mathbf{b})^2 = \mathbf{r}^2$ corresponde a la ecuación de una ...
3. Al conjunto de m·n números reales ordenados en m filas y n columnas se le denomina ...
4. Igualdad entre dos expresiones algebraicas que se convierte en una identidad numérica sólo para ciertos valores dados de las letras que contienen las expresiones.
5. La integral definida permite hallar, entre otras aplicaciones, el "..." encerrada entre dos curvas.
6. Una ... es la intersección de dos planos secantes.
7. Número invariante que se obtiene a partir de los elementos de una matriz cuadrada.
8. La expresión: $\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2} + \frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2} = 1$ corresponde a la ecuación reducida de una ...
9. Es un número único para cada cualquier sucesión convergente. En cualquier entorno suyo, arbitrariamente pequeño, están casi todos, todos salvo un número finito, los términos de la sucesión numérica.
10. Conjunto de valores numéricos delimitados entre dos, que denominamos extremos, y que pueden pertenecer o no.
11. Curvas que se obtienen al intersectar un cono circular recto con planos.
12. El signo de la función "..." de una función, en un intervalo dado, nos indica si la función es creciente o decreciente en dicho intervalo.

10. LOS JUEGOS OLÍMPICOS



Según la tradición, los primeros Juegos Olímpicos se celebraron en el año 776 antes de nuestra era.

El barón Pierre de Coubertín, apasionado por el ideal atlético de los antiguos griegos hizo revivir el espíritu olímpico. Los Juegos antiguos habían quedado interrumpidos por un edicto del emperador Teodosio en 393 d.C.

Los Juegos Olímpicos que conocemos hoy en día, son una reencarnación de las Olimpíadas celebradas por los griegos en la antigüedad y ofrendados en honor a los dioses del Olimpo.

Los primeros Juegos Olímpicos de la Edad Moderna se abrieron en 1896 y se celebraron simbólicamente en su patria de origen, Grecia, concretamente en su capital, Atenas. En las pruebas participaron trece países. Cuatro años después de Atenas, París recibía de nuevo a los atletas. Los organizadores quisieron con ello mantener la periodicidad de los antiguos Juegos, que hoy acogen a más de 15.000 atletas de todo el mundo.

Los Juegos Olímpicos u Olimpíadas son el más fastuoso, importante y presenciado evento deportivo de la Humanidad. Los mejores atletas de todo el mundo compiten cada cuatro años representando más de un centenar de países en decenas de disciplinas.

A continuación te mostramos un listado de ciudades que han organizado las ediciones de Los Juegos Olímpicos Modernos:

Atenas 1896	París 1924	Melbourne 1956	Moscú 1980
París 1900	Amsterdam 1928	Roma 1960	Los Ángeles 1984
Sant Louis 1904	Los Ángeles 1932	Tokio 1964	Seúl 1988
Londres 1908	Berlín 1936	México 1968	Barcelona 1992
Estocolmo 1912	Londres 1948	Munich 1972	Atlanta 1996
Amberes 1920	Helsinki 1952	Montreal 1976	

Pero no sólo las Olimpíadas cada cuatro años son importantes: en los períodos intermedios los atletas compiten para clasificar en decenas de torneos clasificatorios y eliminatorias que sirven de puerta de entrada a los Juegos Olímpicos.

El Comité Olímpico Internacional es responsable de la organización de los juegos y para dichos fines cuenta con representantes y delegados de cada uno de los países. Cada país participante cuenta con un Comité Olímpico Nacional que coordina la participación y clasificación de sus atletas en las Olimpíadas y otros torneos de importancia.

10. LOS JUEGOS OLÍMPICOS

Antes de 1992, Barcelona trató de ser sede de los Juegos de 1924, 1936 y 1972. La inversión para crear una infraestructura necesaria y adecuada fue bastante elevada, cerca de $ 20 billones de las antiguas pesetas. Todo fue proyectado de forma que las obras tuvieran uso permanente, cerca de 41 estadios construidos para tal evento. Además se invirtió en seguridad para evitar cualquier tipo de atentado. Así pues, supuso un gran esfuerzo económico para que un total de 169 países participaran en 257 eventos y compitieran un total de 9.367 deportistas de 23 disciplinas diferentes.

La fiesta de apertura de los Juegos de Barcelona fue en el Estadio Olímpico de Montjuic. La idea de la ceremonia era representar al Mar Mediterráneo entrado en el estadio con todos sus personajes, fantasías y leyendas. Vía satélite 3,5 billones de personas asistieron al mega espectáculo. Las imponentes voces Monserrat Caballé y de los tenores Plácido Domingo y José Carreras fueron parte del espectáculo.

Al final, se presentó el Ballet Cristina Hoyos, uno de los más grandes nombres de la danza española. En medio de una lluvia de fuegos artificiales, Cobi, la mascota catalana desapareció navegando en un barco de papel.

A continuación mostramos datos de participación de las últimas ediciones de Los Juegos Olímpicos:

Año	1980	1984	1988	1992	1996
Ciudad	**Moscú**	**Los Ángeles**	**Seúl**	**Barcelona**	**Atlanta**
Países	80	140	159	169	198
Eventos	203	221	237	257	268
Deportes	21	21	23	23	53
Hombres	4.092	5.230	6.279	6.659	7.000
Mujeres	1.125	1.567	2.186	2.708	3.750

10. LOS JUEGOS OLÍMPICOS

También vamos a proporcionarte el número de medallas que obtuvo España en cada una de las anteriores ediciones:

Año	1980	1984	1988	1992	1996	2000
Ciudad	**Moscú**	**Los Ángeles**	**Seúl**	**Barcelona**	**Atlanta**	**Sydney**
Oro	1	1	1	13	5	3
Plata	3	2	1	7	6	3
Bronce	2	2	2	2	6	5

Cuestiones:

10.1. ¿Podrías obtener una función que nos indicara la relación entre el año natural y la edición de los Juegos Olímpicos Modernos? (Recuerda que Los Juegos Olímpicos se interrumpieron).

10.2. ¿Cuándo se organizaron Los Juegos Olímpicos en España?, ¿Qué posición ocupan?

10.3. ¿Cuántos atletas han participado en las últimas ediciones? ¿Se ha producido un incremento o una reducción? Halla los parámetros de centralización y de dispersión.

10.4. ¿Cuántas medallas consiguió España en las últimas seis ediciones de Los Juegos Olímpicos? ¿Cuál ha sido su media? ¿Podrías deducir, sin calcular, cómo sería su varianza?, ¿qué observas? Razona tus respuestas.

10.5. Haz un estudio estadístico bidimensional y realiza un informe donde puedas concluir la relación de dependencia o independencia de las variables elegidas. Utiliza gráficos adecuados para presentar la información y halla la recta de regresión infiriendo datos.

ROMA

FICHAS DE TRABAJO. ÍNDICE DE CONTENIDOS		
ACTIVIDAD	**BLOQUE**	**CONTENIDOS**
1. Los arqueros matemáticos	-Geometría -Análisis	-Ángulos -Trigonometría -Parábola. Tiro parabólico
2. Los espectáculos	-Geometría	-Identificación de cónicas -Cálculo longitud arco de curva
3. El templo	-Aritmética -Proporcionalidad -Geometría	-Razón de semejanza -Semejanza de triángulos -Razones trigonométricas
4. Embalses y acueductos	-Aritmética -Proporcionalidad	-Volumen -Regla de tres simple
5. Campus espartarius	-Resolución de problemas -Estadística y probabilidad	-Proporciones -Cadenas de Markov
6. Los impuestos del imperio	-Estadística y probabilidad	-Tablas, diagramas y gráficas para representar datos -Tablas de doble entrada -Optimización
7. El faro de Brigantium	-Geometría	-Trigonometría

1. LOS ARQUEROS MATEMÁTICOS

Cuando las legiones romanas se disponían a atacar a las tropas enemigas en primer lugar actuaban los arqueros. Con ellos pretendían diezmar el ejército contrario antes de pasar al combate cuerpo a cuerpo. Para conseguirlo, los arqueros se situaban a 500 metros de distancia de sus enemigos, tensaban sus arcos y soltaban sus flechas a una velocidad de 75 m/seg., pero no todas las flechas alcanzaban su objetivo.

Para perder el menor número de flechas posibles, uno de los arqueros debía decidir con qué ángulo debían de lanzar para que llegasen hasta los enemigos. Contaba con una tabla donde aparecían todas las fórmulas que describen el movimiento de la flecha:

60 Velocidad inicial en eje X	$\cdot\cos(\alpha)$
Velocidad inicial en eje Y	$\cdot\text{sen}(\alpha)$
Tiempo de Vuelo	
Altura máxima de la flecha	
Alcance máximo de la flecha	

1.1. ¿Podrías decir con qué ángulos es posible que los arqueros alcancen su objetivo?

1.2. Dibuja un gráfico que represente el movimiento de la flecha de un arquero que ha lanzado con un ángulo de 60°.

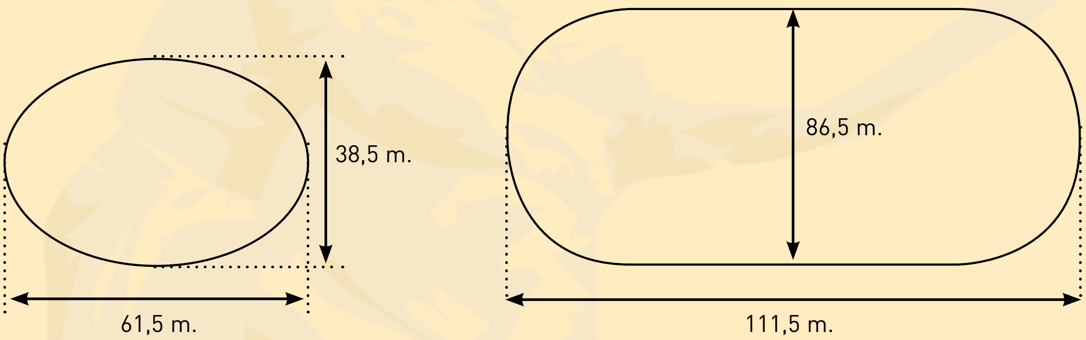
1.3. ¿Cuál es la distancia mínima de seguridad para que no te alcance el arquero con una de sus flechas?

Tras una primera oleada de ataques, los enemigos se repliegan y se colocan tras una colina de 200 metros de altura. Los arqueros avanzan y se colocan de nuevo a 500 metros de distancia, pero tienen justo en medio entre ellos y sus enemigos la colina. El arquero matemático coge de nuevo su tabla, hace nuevos cálculos y dice: “es difícil porque tenemos poco margen de error, pero podemos conseguir salvar la colina y que nuestras flechas lleguen hasta ellos”.

1.4. ¿Crees que lo conseguirán? ¿Cómo deberían lanzar sus flechas?

2. LOS ESPECTÁCULOS

Los romanos eran muy aficionados a los espectáculos públicos. En el anfiteatro realizaban las luchas de gladiadores y en el circo las carreras de cuadrigas. Ambos edificios tenían forma aproximada de elipse. Los dibujos siguientes representan las dimensiones del anfiteatro y el circo de la antigua Tarraco (actual Tarragona).



ANFITEATRO　　　CIRCO

2.1. ¿Cuántas veces es más grande el circo que el anfiteatro? Sin embargo, ¿Cuántos anfiteatros podríamos construir en la parcela que ocupa un circo?

2.2. En la arena del circo se realizaban las carreras de cuadrigas (carros tirados por caballos). Para que te hagas una idea de su tamaño, infórmate sobre las dimensiones del terreno de juego de un campo de fútbol. ¿Cuántos campos de fútbol podríamos construir en la arena del circo?

2.3. Los espectáculos del anfiteatro de Tarraco podían presenciarlos 14.000 personas. ¿Cuántas personas crees que podrían presenciar las carreras en el circo?

2.4. La velocidad máxima que podían alcanzar las cuadrigas de caballos era de 60 km/h. en la recta y de 30 km/h. para dar la vuelta. ¿Cuánto tardaban en dar una vuelta al circo una vez lanzada la carrera?

2.5. La puerta por donde accedían las cuadrigas a la arena tenía una anchura de 5 metros. Si cada persona que asistía al circo disponía de 50 centímetros para sentarse, ¿cuántos eran los romanos privilegiados que veían el espectáculo en primera fila?

3. EL TEMPLO

Uno de los edificios singulares presentes en la Roma de Terra Mítica es el llamado Itálica. El nombre de Itálica hace referencia a la ciudad que fundó Publio Cornelio Escipión en el año 206 a.C. en las cercanías de la ciudad sevillana de Santiponce, pero en realidad el edificio es un templo, inspirado en el Templo "Maison Carré" de Nimes (Francia). Normalmente, estos edificios públicos se construían en el foro de la ciudad.

3.1. Como puedes observar en la fotografía, una parte del edificio es cerrada y otra una terraza. ¿Cuántas veces es más grande la parte cerrada que la terraza?

3.2. La escalera de acceso, formada por seis escalones, salva un desnivel de 1,08 metros. ¿Qué altura tiene cada escalón?

3.3. Si hubiéramos construido en lugar de la escalera una rampa de acceso al edificio, ¿Qué longitud tendría la rampa para que la pendiente no superase el 12%?

3.4. La rampa que aparece a la izquierda tiene una longitud de 11 metros y salva un desnivel de 0,8 metros ¿Cuál es el desnivel de esta pendiente? ¿Qué ángulo forma la pendiente con respecto al suelo?

3.5. Ya en el interior del edificio, queremos construir una escalera para acceder al altillo de madera. Tenemos que subir una altura de 2,70 metros y disponemos en el suelo de un hueco libre de 1x4 metros. ¿Qué dimensiones debemos darle a los escalones para que todos sean iguales?

4. EMBALSES Y ACUEDUCTOS

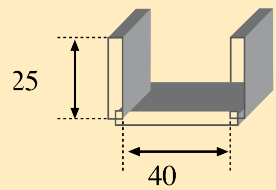
Los romanos, para abastecer de agua a sus ciudades, construían grandes embalses para almacenar el agua y acueductos para trasladarla hasta ellas. Uno de los embalses más conocidos de la península ibérica es el de La Alcantarilla, en Toledo, sobre el río Guajaraz y que se ha conservado hasta nuestros días. Su cuenca de 90 km^2 le permitía embalsar 5 millones de metros cúbicos cada año, de los que aproximadamente dos tercios se dedicaban para la agricultura y la industria.

Acueducto de Segovia. (Foto Juan Manuel Salabert. Cuadernos de arte español, nº 54).

4.1. En la actualidad cada persona necesita una media de 30 litros de agua diarios. ¿Cuántos habitantes podrían vivir como máximo en esa ciudad romana?

4.2. Si queremos que en la ciudad vivan como mucho 100.000 habitantes. ¿Cuántos km^2 de cuenca necesitaría nuestro embalse?

4.3. La sección del canal de agua que corona el acueducto la tienes en el dibujo, medida en centímetros. Si la velocidad del agua es de 0,5 m/seg., ¿cuál es el caudal de la acequia en litros por segundo?



4.4. Las domus romanas (casas) de los personajes importantes solían tener un aljibe, no demasiado grande pues sólo podían almacenar unos 20.000 litros. ¿Cuánto tardarían en llenarlo con el agua del acueducto?

5. CAMPUS ESPARTARIUS

Uno de los atractivos que tenía para los romanos el territorio de Hispania era la gran producción de lino y esparto que había en sus tierras. El lino lo utilizaban para fabricar telas y el esparto para casi todo, calzado, capazos para transportar el trigo, esteras, cestos, etc...

Al retirarse de la legión, al soldado Lucio Elio le fue asignada una finca de 50 hectáreas en la recién fundada Emérita Augusta (la actual Mérida). Tras construirse una pequeña villa con jardines, en la que ocupó una parcela de 1 hectárea, se puso a pensar a qué cultivos dedicaría sus tierras. Como necesitaría aceite, vino y trigo para todo el año, lo mejor era plantar 3 hectáreas de cada cosa. El resto de las tierras las dedicaría para comerciar con sus productos. Como el lino se gastaba mucho menos que el esparto, pensó plantar el primer año la cuarta parte de las tierras que le quedaban libres y el resto de esparto.

Como el lino es un cultivo que desgasta mucho la tierra, a partir del segundo año y en cada uno de los siguientes cambiaría los cultivos; la mitad de lo que tenía plantado de lino lo plantaría de esparto y viceversa, la mitad de lo que tenía plantado de esparto lo plantaría de lino.

5.1. ¿Cuántas hectáreas tendrá de cada cultivo el segundo año? ¿Y el tercero?

5.2. ¿Crees que hace bien Lucio el reparto de cultivos cada año pensando en la distribución a largo plazo? ¿Seguirá produciendo en el futuro más lino que esparto como quería?

6. LOS IMPUESTOS DEL IMPERIO

Las colonias romanas a lo largo y ancho del Mediterráneo servían para abastecer a la ciudad de Roma de trigo, vino, aceite, lino y esparto. En la época de mayor esplendor romano la capital, Roma, llegó a tener más de medio millón de habitantes que necesitaban de todos esos productos.

A fin de controlar como contribuían cada una de ellas, uno de los senadores se encargaba de anotar la carga de cada uno de los barcos que llegaban al puerto de Roma. En la tabla siguiente recogió las cantidades que provenían de las principales ciudades de Hispania.

	Trigo (Tm)	Vino (Hl)	Aceite (Hl)	Lino (Tm)	Esparto (Tm)
Cartago Nova	10	80	20	2	10
Gades	15	90	25	4	12
Saguntum	12	100	16	6	8
Tarraco	14	150	18	5	8
Valentia	9	120	14	6	9

6.1. Como al emperador no le gustan mucho los números, el senador debe realizar un gráfico que recoja todos los datos. ¿Cómo lo harías tú? Dibuja el tuyo.

6.2. En realidad los barcos romanos no eran muy grandes, sólo podían cargar un máximo de 40.000 kg. en cada viaje. Sin embargo, el precio era diferente según las mercancías que llevasen, si sólo eran sólidos el viaje costaba 1.000 sestercios; si sólo eran líquidos el viaje costaba 800 sestercios pero sólo podían cargar como máximo 30.000 litros pues también debían llevar las ánforas que los contenían. Por último podían elegir una modalidad mixta por 900 sestercios y cargar 25 Tm. de sólidos y 10.000 litros de líquidos. Como Saguntum, Tarraco y Valentia son ciudades cercanas deciden compartir los barcos para intentar ahorrar dinero. ¿Cómo conseguirían ahorrar el mayor número de sestercios?

7. EL FARO DE BRIGANTIUM

La llamada Torre de Hércules en La Coruña es una construcción del siglo XVIII que recubre el faro romano de Brigantium, que imita en su construcción al faro de Alejandría. Su función estaba relacionada con las instalaciones portuarias y con las rutas atlánticas.

Cuando un barco se aproximaba al puerto debía de pasar por dos puntos de control de maniobra, cuando llegaban al primero desde él podían ver la luz del faro bajo un ángulo de 4°. El segundo punto de control se encontraba 167 m. más cerca del faro y observaban desde allí la luz con un ángulo de 6°.

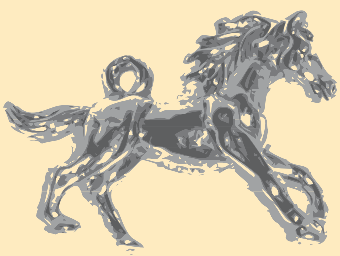
Torre de Hércules en La Coruña. (Foto I.C.R.B.C.)

7.1. ¿Qué altura tenía el faro de Brigantium?

7.2. Para detectar la luz del faro el vigía del barco debía observarlo con un ángulo de medio grado, pues por debajo de este valor el ojo humano no la distinguiría. ¿A qué distancia del faro se encontraban cuando el vigía avistaba el faro por primera vez?

IBERIA

1. Juegos de dados: "Marlota" y "Riffa"	-Probabilidad	-Distribuciones de probabilidad
2. El álgebra: Savasorda	-Álgebra y geometría	-Resolución de triángulos
3. Los árabes y el agua: la noria	-Análisis de funciones	-Funciones circulares
4. Juan Caramuel: inicio de la probabilidad	-Probabilidad	-Probabilidad compuesta
5. Horchata de chufa valenciana	-Aritmética y álgebra	-Porcentajes, repartos
6. Ramón Llull y la combinatoria	-Combinatoria	-Números combinatorios
7. Al-Qalasadi: el principio de inducción	-Álgebra	-Principio de inducción
8. Los repartos y el talmud	-Aritmética y álgebra	-Problemas de reparto
9. La barraca valenciana	-Análisis -Estadística -Geometría	-Funciones, regresión y trigonometría
10. La clepsidra: reloj de agua	-Análisis de funciones	-Funciones y cálculo integral



1. JUEGOS DE DADOS: “MARLOTA” Y “RIFFA”

Muchos de los juegos que conocemos, han llegado hasta nosotros gracias a Alfonso X, rey de Castilla y León, que nació en Toledo en 1221 y murió en Sevilla en 1284, reinando desde 1252 hasta su muerte.

Conocido como “El Sabio” por su importante contribución al campo de la cultura favoreciendo el intercambio entre las civilizaciones cristiana, musulmana y judaica a través de la “Escuela de Traductores de Toledo” que él mismo fundó.

En su reinado se elaboraron “Las tablas astronómicas alfonsíes” que fueron utilizadas por el mismo Copérnico.

En lo referente a los juegos mandó producir “El libro del ajedrez, dados y tablas”. Vais a conocer dos juegos de dados que vienen recogidos en ese libro.

MARLOTA

Un jugador lanza dos dados y la suma obtenida es su apuesta. Luego lanza de nuevo los dados y la nueva suma es la apuesta del contrincante. Finalmente lanza los dados sucesivamente hasta que la suma coincida con alguna de las dos apuestas. En ese momento termina la partida y gana el jugador que su apuesta coincide con el resultado.

En el juego no se consideran válidos los resultados con suma inferior a 7 o superior a 14.

1.1. Haz una tabla con todos los resultados posibles y su frecuencia. Calcula la probabilidad de cada uno de ellos.

1.2. Representa la distribución de probabilidad y calcula su media y su desviación típica.

1. JUEGOS DE DADOS: “MARLOTA” Y “RIFFA”

1.3. ¿Por qué crees que en el juego no se tienen en cuenta algunos resultados?

1.4. Si pudieras elegir un resultado para jugar contra tu contrincante, ¿cuál elegirías? Si tu número es el 8, ¿cuál debería tener tu contrincante para que el juego fuera justo?

1.5. Juega varias partidas con tu compañero o compañera.

Puedes utilizar una hoja de cálculo para contestar a las preguntas anteriores.

RIFFA

Un jugador lanza dos dados hasta que salgan iguales y luego lanza un tercer dado y anota la suma de los tres. Otro jugador hace lo mismo. Ganará el que obtenga la puntuación más alta.

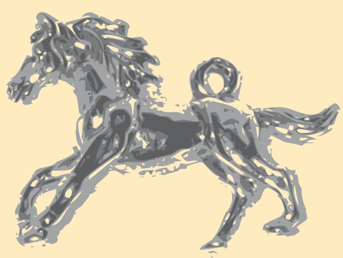
1.6. ¿Cuántos pares iguales hay al lanzar dos dados? ¿Qué probabilidad hay de que salga el par (3,3)? ¿Con qué frecuencia, aproximadamente, saldrá un par idéntico?

1.7. Haz una tabla de la frecuencia de la suma de los tres dados, considerando que los dos primeros son iguales.

1.8. Si mi par es el (2,2) y el de mi contrincante el (4,4), ¿qué probabilidad tengo de ganar cuando lancemos el otro dado? ¿Y si mi compañero ha sacado el (3,3)?

1.9. ¿Qué tiradas eliminarías para hacer el juego equiprobable?

1.10. Juega varias partidas con tu compañero o compañera.



2. EL ÁLGEBRA: SAVASORDA

En la Cataluña medieval hay que reservar un lugar de honor a **Abraham bar Hiyya**, más conocido por **Savasorda** (jefe de la guardia), matemático y astrónomo judío nacido en 1065 y muerto en 1136 en Barcelona.

Autor de una obra notable en hebreo, compuesta para iniciar en la ciencia árabe a las comunidades judías. En colaboración con **Platón de Tívoli** escribió compuesto en hebreo y traducido por Tívoli al latín.

Trata de las ecuaciones de 2º grado. Es un tratado de agrimensura dedicado al cálculo de superficies. En dicho texto se encuentra la fórmula de Herón:

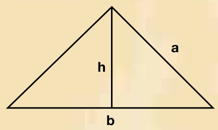
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Aunque dicha fórmula era conocida ya por los agrimensores romanos, los occidentales verán su demostración en los traducidos por **Gerardo de Cremona**.

Como reconocimiento a sus trabajos de Astronomía existe un cráter en La Luna con su nombre.

2.1. Uno de los problemas resueltos por Bar Hiyya fue determinar en un triángulo isósceles la base y la altura conociendo el área y el lado igual.

Con un poco de ayuda vas a demostrar las fórmulas que obtuvo este matemático judío.



Del triángulo de la figura se deducen las fórmulas:

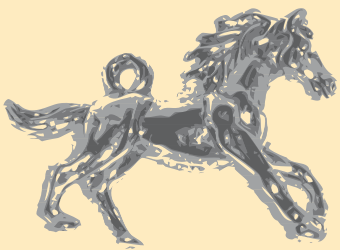
$$a^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad \text{[I]} \qquad S = \frac{b \cdot h}{2} \quad \text{[II]}$$

a) A partir de $a^2 - 2$deduce $\dfrac{\sqrt{a^2 - 2S}}{2} = \dfrac{h}{2} - \dfrac{b}{4}$ [III]

b) Eleva al cuadrado, suma miembro a miembro $a^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$

y deduce la expresión $\dfrac{\sqrt{a^2 + 2S}}{2} = \dfrac{h}{2} + \dfrac{b}{4}$ [IV]

c) A partir de [III] y [IV] obtén las fórmulas para calcular h y b conocidos S y a.



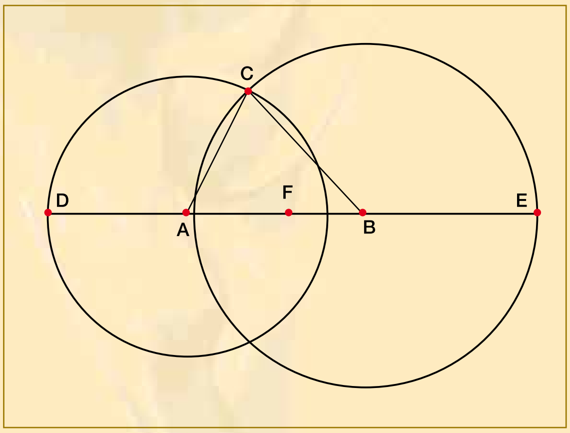
2.2. a) Aplica las fórmulas obtenidas para calcular la altura y la base de un triángulo isósceles en el que el lado igual mide 5 y el área 12.
b) Si sustituyes los datos en [I] y [II] tienes un sistema de ecuaciones. Resuélvelo y comenta los resultados.

2.3. Como ya sabes, Bar Hiyya conocía la fórmula de Herón:

$$S = \sqrt{p(p\text{-}a)(p\text{-}b)(p\text{-}c)}$$

Vas a resolver el problema anterior utilizando exclusivamente esa fórmula:
a) Expresa p, p-a, p-b y p-c en función de b.
b) Sustituye en la fórmula y resuelve la ecuación bicuadrada que obtengas.
c) Si te fijas en uno de los dos triángulos equiláteros expresa p, p-a, p-b y p-c en función de h y sustituye en la fórmula de Herón. Resuelve la ecuación.

2.4. Si conoces el programa Cabri podrás comprobar geométricamentte la fórmula de Herón:
a) Dibuja un triángulo cualquiera de vértices A, B y C.
b) Dibuja un círculo de centro A y radio AC y otro de centro B y radio BC.
c) Prolonga la base AB hasta que corte a las circunferencias en D y E.
d) Determina el segmento DE y obtén su punto medio F y oculta los círculos.
e) El segmento DF es el semiperímetro.
f) Mide el área del triángulo, sus lados y el semiperímetro.
g) Con la calculadora comprueba la fórmula.

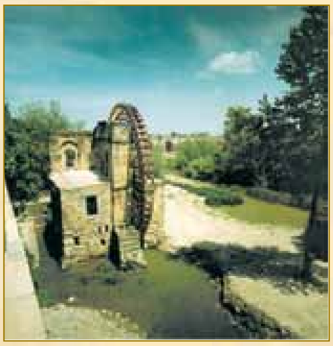


3. LOS ÁRABES Y EL AGUA: LA NORIA

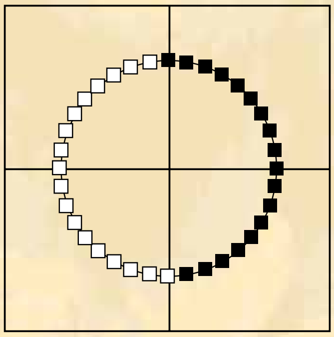
El agua es un elemento esencial sin el cual no puede entenderse la cultura islámica, siendo el recurso en base al cual se diseñan las ciudades musulmanas a partir de sus primeros tiempos.

El origen de las norias es muy antiguo. Marco Vitrubio Polión (siglo I a.C.) arquitecto romano al servicio del emperador Julio César nos da a conocer varios tipos de ruedas elevadoras de agua. Fue a través de los romanos como llegó a la Península Ibérica. Pero se debe a los árabes del período andalusí la difusión y perfeccionamiento a gran escala de este y otros procedimientos hidráulicos.

La noria es una rueda de la que penden unos recipientes que recogen el agua. Cada uno de estos recipientes recibe el nombre de cangilón o arcaduz. Esta denominación como la propia palabra "noria" son de origen árabe. El movimiento de la noria se consigue de manera hidráulica y en las norias más pequeñas por tracción animal.



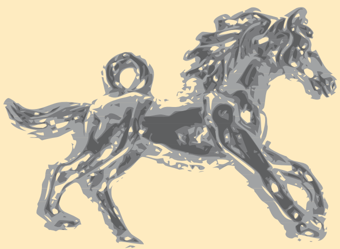
El giro de la noria permite que los arcaduces vacíos se llenen al pasar por la corriente de agua y cuando llegan a la parte superior vuelquen el agua en un canal y así se consigue elevar el agua.



El esquema representa una noria con 36 arcaduces. Se han elegido los ejes de coordenadas de forma que el origen esté en el centro de la noria. La noria gira de derecha a izquierda, llenando de agua los arcaduces y vaciándolos al llegar a la parte más alta.

3.1. a) ¿Si el diámetro de la noria es de 12 m. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que describe la noria?
Vamos a numerar como el arcaduz 1 el que se encuentra en la parte derecha inmediatamente encima del eje horizontal.
b) ¿Qué coordenadas tienen los arcaduces 3, 12, 27 y 33?

3.2. Si la noria da una vuelta completa cada 30 s. escribe las ecuaciones de las funciones que expresan:
a) La altura del arcaduz 36 en función del tiempo.
b) Distancia del arcaduz 36 al eje vertical de la noria en función del tiempo.
Representa las gráficas de las dos funciones.

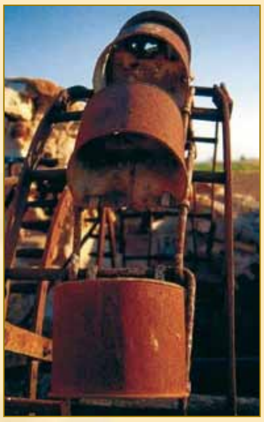


3. LOS ÁRABES Y EL AGUA: LA NORIA

3.3. ¿Cuáles serían las funciones y sus gráficas correspondientes para el movimiento del arcaduz 6? Represéntalas conjuntamente con las primeras gráficas.

3.4. ¿Qué fórmulas y qué gráficas se obtendrían para una noria de 6 m. de diámetro? ¿Y si la noria inicial tardara 15 s. en dar una vuelta?

3.5. Los cangilones de la noria de la figura son cilíndricos.
a) Supongamos que su diámetro y su altura miden 30 cm. ¿cuál es su volumen?
b) Demuestra que, para un volumen dado, las dimensiones R=H optimizan el gasto del metal de cangilón.
c) Si utilizáramos un cangilón de este tipo, ¿en cuánto se reduciría el coste?



3.6. Calcular para el tipo de arcaduz y una velocidad de una vuelta por minuto, la cantidad de agua elevada.
¿Y si se retiraran la tercera parte de los cangilones y así aumentara la velocidad en 10 s. por vuelta?

3.7. Diseña una noria que pueda elevar unos 600 litros por minuto, con las siguientes características:
a) velocidad superior a 2 vueltas por minuto.
b) Radio de la noria menor de 12 m.
c) Número máximo de cangilones 24.

4. JUAN CARAMUEL: INICIO DE LA PROBABILIDAD

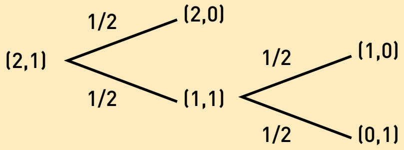
España ha ido siempre con gran retraso en el conocimiento y estudio de las Matemáticas de los últimos siglos. Pero es en el origen del Cálculo de Probabilidades donde destaca Juan Caramuel Lobkowitz (1606-1682) célebre por su sabiduría y enciclopedismo.

Nació en Madrid y a los diecisiete años ingresó en la orden cisterciense. Cursó estudios en las Universidades de Alcalá, Salamanca y alcanzó el título de doctor en la de Lovaina. Cultivó las más variadas materias tales como las matemáticas, la astronomía, la arquitectura, la teología, etc., a las que su vasta cultura, propia de un hombre del Renacimiento, y gran ingenio dedicó más de dos centenares de obras.

4.1. Este problema fue analizado correctamente por Caramuel:
a) ¿Cuántas sumas posibles hay al lanzar dos dados?
b) Calcula la probabilidad de cada una de las sumas posibles.

4.2. Una situación análoga pero más compleja es la que le planteó el Príncipe de Toscaza a Galileo: "**¿Por qué cuando se lanzan tres dados, obtenemos con más frecuencia la suma 10 que la suma 9, aunque hay las mismas formas de conseguir 9 que 10?**". ¿Sabrías explicarlo?
Caramuel tratará de resolver también el problema de la división de apuestas.
Veamos cómo lo expone: "**Muchas veces ocurre que por motivos diversos, el juego se da por terminado. Y dirás ¿qué hay que hacer con los depósitos de dinero? Aquí está la pregunta y su solución: No sólo nos referiremos a los dados, sino también a la pelota y a cualquier clase de juegos, lo que merece que los examinemos con cuidado**".

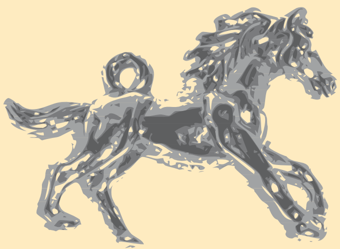
Y, a partir de este enunciado resolverá este problema de la división de apuestas entre dos jugadores de los que a uno le falta una partida para ganar y al otro 2, 3, 4... etc.
Si quedaran 2 apuestas a A y una apuesta a B designamos la situación mediante el par (2,1). Mediante el diagrama de árbol calculamos la probabilidad de ganar cada uno:



$= \frac{1}{4}$ **p(B)** $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$t = \frac{1}{k}(\sqrt{H_0} - \sqrt{H})$ y $VH_{clepsidra} = \frac{2\pi}{3\sqrt{A}}\sqrt{^3}$.

Luego el reparto ha de ser 1:3.
¡Caramuel no siguió este razonamiento!



Bachillerato. Matemáticas, Iberia

4. JUAN CARAMUEL: INICIO DE LA PROBABILIDAD

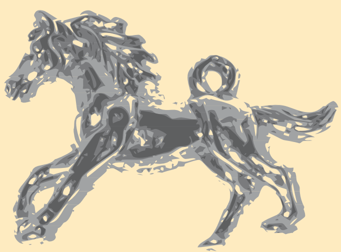
4.3. Resuelve los casos (3,1) y (4,1). Encuentra una ley general para el caso (n,1).

4.4. ¿Sabrías encontrar la solución para los casos (2,2), (3,2) y (4,2)?

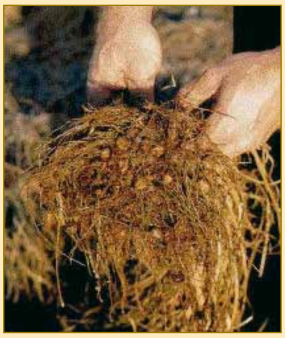
4.5. Caramuel intentó resolver situaciones con tres jugadores equivocándose en la solución.
Utilizando la misma técnica que en el ejercicio anterior da el resultado correcto para el caso (2,1,1) y (2,2,1).
En el primer caso dio como reparto 2:5:5 y en el segundo 2:1:1.

4.6. Un último problema resuelto incorrectamente por Juan Caramuel fue es siguiente: **Se lanza un dado y gana el primero que obtenga un cierto número del 1 al 6. Al interrumpirse el juego surge la necesidad de averiguar la proporción en que se han de repartir lo apostado**.
La respuesta de Caramuel es que se ha de repartir según las razones 37 a 35, respectivamente, entre A (el primero que debería seguir el juego) y B (el jugador que jugaría cuando fallara el otro).
a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane A en la primera tirada? ¿Y en la tercer? ¿Y en la quinta? ¿Y de que gane A?
b) Haz lo mismo para B e indica la proporción en que se han de repartir la apuesta.

4.7. Un problema de este tipo es que propuso a Blaise Pascal el caballero de Meré en 1654: **Dos jugadores: Antonio y Bernardo, ponen sobre la mesa 10.000 monedas cada uno. Un árbitro va a tirar un dado varias veces seguidas. Cada uno de los jugadores va a elegir un número entre el 1 y el 6. Antonio elige el 5 y Bernardo el 3. Se llevará las 20.000 monedas aquel cuyo número salga primero tres veces. Resulta que después de unas cuantas tiradas el 5 ha salido dos veces y el 3 sólo ha salido una vez. En este momento Bernardo recibe un mensaje por el que debe abandonar necesariamente la partida. ¿Cómo repartir de modo justo y equitativo las 20.000 monedas**.
Pascal pensó mucho, escribió a su amigo Fermat y por diferentes caminos dieron ambos con la misma solución del problema y con un montón enorme de ideas: la **Teoría de la Probabilidad** había comenzado.
Resuelve el problema que fue tan importante para el inicio del cálculo de probabilidades.



5. HORCHATA DE CHUFA VALENCIANA



El fruto seco que se llama "chufa" tiene su origen en el antiguo Egipto. Es una de las primeras cosechas domesticadas por los hombres. De hecho, los arqueólogos encontraban jarrones con chufas en las tumbas de los faraones. Los árabes introdujeron este tubérculo en tierras de la península durante los años 700 d.C. a 1200 d.C. Valencia fue la más apropiada para su cultivo, aunque se cultiva en toda España. Con las chufas se produce la horchata. Ésta es muy beneficiosa para la salud por ser altamente energética y diurética, con altos contenidos en hierro y potasio y no contener sodio.

Cuentan que en cierta ocasión, una joven aldeana le dio a probar al Rey de Cataluña y Aragón. Complacido por su sabor, preguntó, "Que es això?" Y la joven respondió, "Es leche de chufa" (nombre original), a lo que el Rey rectificó diciendo, "Això no es llet, això es OR, XATA!" (Esto no es leche, esto es oro, guapa!).

Los ingredientes de una horchata son: chufas, azúcar, agua y canela de rama.

La chufa y el azúcar se utilizan en la misma proporción mientras que la cantidad de agua que se emplea es cinco veces la de chufa y azúcar.

5.1. En una finca de cultivo de chufas ha llegado el momento de llevar a cabo la recolección. Para ello se utilizarán dos tractores distintos. Si estos tractores trabajaran juntos tardarían 8 días en completar la recolección. Pero si hubiera empezado un tractor arando la mitad de la finca y hubieran continuado los dos juntos arando la mitad restante, se hubiera hecho la recolección completa en 10 días. ¿Cuántos días tardarían cada tractor en arar la finca entera individualmente?

5. HORCHATA DE CHUFA VALENCIANA

5.2. Las chufas recogidas se llevan a un almacén para que se sequen durante un tiempo. Una vez seco hay que llevarlas a una fábrica para la elaboración de horchata. El transporte lo realizan dos camiones. El segundo camión empieza a trabajar una hora después que el primero. Tres horas después que el primer camión ha empezado el trabajo queda aún por hacer 9/20 del trabajo. Al terminar se observa que cada camión ha transportado la mitad de la cantidad. ¿Cuántas horas tardaría cada uno en hacer el trabajo individualmente?

5.3. El propietario de la finca después de realizar cálculos, advierte que el aumento en la producción en la finca comparada con la del año anterior es del 5 por 100 durante el primer año y del 8 por 100 durante el segundo. ¿Cuál será este porcentaje de aumento en el tercer año para que el aumento medio anual de la producción durante tres años sea igual al 10%?

5.4. En la fábrica donde se produce la horchata tienen dos depósitos que contienen una mezcla de agua y chufa. En el primer depósito la chufa y el agua están en la relación 2:11 y en el otro en la relación 3:7. ¿Qué cantidad se debe tomar en cada depósito si queremos obtener 100 litros de una mezcla en la que la proporción chufa-agua sea de 1 a 5?

6. RAMÓN LLULL Y LA COMBINATORIA

Ramón Llull nació en Mallorca en 1235 y murió en Túnez en 1316, casado y con hijos, fue un hombre que tenía todas las comodidades posibles, era rico, culto y ocupaba cargos importantes; alrededor de los 30 años decidió dedicarse radicalmente a la predicación de la "palabra de Dios", sobre todo en el mundo islámico. Hizo numerosos estudios teológicos y filosóficos, aprendió árabe para poder predicar a "los infieles" e incluso escribió libros en esta lengua.

Todos sus estudios y obras tenían el objetivo de explicar y demostrar la coherencia de la creación, la grandeza de Dios,... En este sentido se introdujo también en las matemáticas: la lógica simbólica tiene un papel muy importante en su obra "" (una verdadera enciclopedia), c el pensamiento combinatorio, que ejerció una gran influencia sobre matemáticos posteriores (como Leibnitz). En su obra "" aparece por primera vez la denominación de combinatoria que hoy se usa.

Tuvo una vida muy agitada, estuvo encarcelado, hizo muchos viajes, publicó numerosas obras, incluso una antigua tradición dice que murió lapidado (apedreado) en Túnez por predicar el cristianismo.

Hagamos un breve recordatorio sobre los números combinatorios:

El número de combinaciones ordinarias de n elementos de un conjunto con m elementos ($m \rightarrow n$) se designa por $C_{m,n}$ y es igual a:

$$C_{m,n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

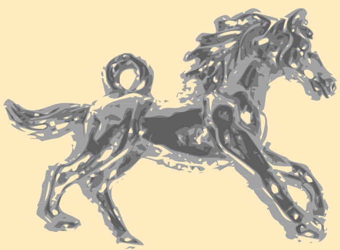
Ejemplo: ¿Cuántos triángulos se pueden formar con los vértices de un cubo?

Dado que en un cubo los ocho vértices están dispuestos de tal manera que no hay tres de ellos alineados, podremos formar tantos triángulos como subconjunto de tres elementos se puedan extraer de un conjunto de ocho. Es decir el número de triángulos que se pueden formar con los vértices de un cubo es igual a:

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = 56$$

El número de combinaciones con repetición de n elementos de un conjunto con m elementos se designa por $CR_{m,n}$ y es igual a:

$$C_{m+n-1,n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$$



6. RAMÓN LLULL Y LA COMBINATORIA

Ejemplo: Un abuelo, pensando en los regalos que ha de hacer a sus nietos, prepara bolsas conteniendo monedas de 0,2; 0,5; 1 y 2 euros con la condición de que cada bolsa contenga exactamente 20 monedas. ¿Cuántas bolsas distintas, atendiendo a la composición, puede preparar?

Evidentemente cada bolsa debe contener elementos repetidos, no diferenciándose las bolsas por el orden que ocupan las monedas en ellas; luego, se trata de combinaciones con repetición:

$$CR_{4,20} = \frac{(4+20-1)!}{20!(4-1)!} = \frac{23!}{20!\cdot 3!} = 1.771$$

6.1. Disponemos de 8 puntos de tal manera que no están alineados tres a tres. Se pide:
a) ¿Cuántas rectas determinan?
b) ¿Cuántos triángulos determinan?

6.2. ¿Cuál es el número de diagonales de un polígono convexo de 20 lados?

6.3. Se tiene 10 puntos en un plano, 4 de ellos están en línea recta y no hay otro subconjunto de más de dos alineados. Hallar el número de triángulos que se obtienen uniendo estos puntos de todas las maneras posibles.

6.4. Disponemos de siete colores ¿De cuántas maneras puede pintarse un tetraedro regular, no mezclando colores ni pudiendo utilizar el mismo color para dos caras simultáneamente?

6.5. ¿Cuántas fichas tiene el juego del dominó?

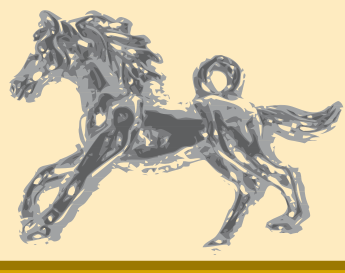
6.6. ¿De cuántas maneras podemos repartir a 10 alumnos en dos grupos de cinco miembros cada uno?

6.7. ¿De cuantas formas podemos colocar seis bolas indistingibles en cuatro urnas numeradas?

6.8. Se dispone de 10 signos + y 6 -. ¿Cuántas alineaciones pueden hacerse, con todos los signos, de manera que nunca dos signos – estén consecutivos?

6.9. ¿Cuántas soluciones naturales tiene la ecuación del plano:
$x + y + z = 6$?

6.10. Mi madre prepara bocadillos consistentes en una tortilla francesa que puede estar acompañada con alguno, ninguno o con todos los ingredientes siguientes: Longaniza, butifarra, queso, cebolla, mahonesa, tomate y pepinillos. ¿Cuántos tipos de bocadillos distintos puede preparar mi madre?



7. AL-QALASADI: EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

Abu'l Hasn Ibn Ali **Al Qalasadi** fue un matemático español que nació en Baza (Granada) en 1412 donde vivió hasta ser capturado por los cristianos, murió en Beja (Túnez) en 1482.

Al-Qalasadi escribió varios libros entre los que destacan los de aritmética y álgebra. Calculó sumas de cuadrados y cubos de números naturales.

$1^2 + 2^2 + \dots\dots\dots + n^2$ $\qquad$ $1^3 + 2^3 + \dots\dots\dots + n^3$

Dedujo las siguientes identidades:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots^2 = \frac{\mathbf{n(n+1)(2n+1)}}{6} \qquad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots^3 = \left[\frac{\mathbf{n(n+1)}}{2}\right]^2$$

La veracidad de estas identidades se puede probar utilizando el "Principio de inducción matemática", que es una técnica muy utilizada en matemáticas para demostrar la validez de algunas identidades en las que interviene una variable entera positiva n.

Veamos en que consiste este principio:

Sea S(n) una proposición matemática dependiente de n (número entero positivo), para la cual se tiene que:

(1) S(1) es verdadera; es decir, 1 satisface la proposición.

(2) Para todo K perteneciente a los números enteros positivos, si S(k) es verdadera también lo es S(k+1).
En esta situación, la proposición S(n) es verdadera para todo n perteneciente a los enteros positivos.
- la condición (1) se llama base de inducción.
- la hipótesis "si S(k) es verdadera" se llama hipótesis de inducción.
- la condición (2) se llama paso inductivo.

Veamos un ejemplo:

Demostrar que $1 + 3 + 5 + \dots\dots\dots + (2n+1) = n^2$, para todo $n \to Z^+$

Sea S(n) la proposición: $1 + 3 + 5 + \dots\dots\dots + (2n+1) = n^2$

(1) S(1) es verdadera, dado que $1 = 1^2$

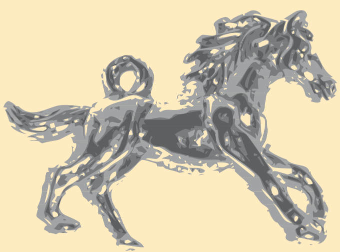
(2) S(2) es verdadera, dado que $1+3 = 2^2$

Sea $k \to Z^+$, arbitrario tal que S(k) es verdadera. Es decir:

$1 + 3 + 5 + \dots\dots + (2k-1) = k^2$ (hipótesis de inducción)

veamos si S(k+1) es verdadera. Para ello deberemos probar que:

$1 + 3 + 5 + \dots\dots\dots + (2(k+1)-1) = (k+1)^2$



7. AL-QALASADI: EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

En efecto:
$1 + 3 + 5 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (2(k+1)-1) = 1 + 3 + 5 \ldots\ldots + (2k-1) + (2(k+1)-1) =$
$= (1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2k-1)) + (2(k+1)-1) = k^2+2k+1 = (k+1)^2$
Por tanto: S(k+1) es verdadera.

En virtud del principio de inducción se tiene que la proposición S(n) es verdadera para todo entero positivo n.

7.1. Utilizando el principio de inducción demuestra que:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\mathbf{n}^2 = \frac{(\ +\ )(2\ +1)}{6}$$

Sea S(n) la proposición: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\mathbf{n}^2 = \frac{(\ +\ )(2\ +1)}{6}$

(1) S(1) es verdadera, dado que: $1^2 = \ldots\ldots$

(2) Sea K un número arbitrario perteneciente a los enteros positivos, tal que S(k) es verdadera. Es decir:
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mathbf{k}^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (hipótesis de inducción)

Veamos si S(k+1) es verdadera. Para ello debemos probar que:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + (\mathbf{k}+1)^2 = \frac{(\ +1)((\ +1)+1)(2(\ +1)+1)}{6} = \frac{(\mathbf{k}+1)(\mathbf{k}+2)(2\mathbf{k}+1)}{6}$$

En efecto:
$1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + (\mathbf{k}+1)^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + \mathbf{k}^2 + (\mathbf{k}+1)^2 =$
$= (1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + \mathbf{k}^2) + (\mathbf{k}+1)^2 =$
$= \frac{(\ +\ )(2\ +1)}{6} + (\mathbf{k}+1)^2$

Realizando la suma y sacando factor común (k+1) se llega a: $\frac{(\ +1)(2^2 + 7k + 6)}{6}$
Si a continuación factorizas el polinomio $(2k^2+7k+6)$ se obtiene que S(k+1) es verdadera y por tanto la proposición también.

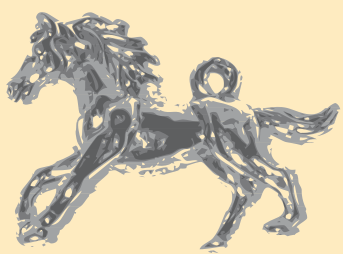
7.2. Demuestra utilizando el método de inducción matemática la identidad:

$$1^3 + 2^3 + \ldots\ldots + {}^3 = \left[\frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}+1)}{2}\right]^2$$

7.3. Demuestra por el método de inducción matemática la identidad:

$$\frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(\ +4)(\ +5)} = \frac{\mathbf{n}}{4(\mathbf{n}+4)}$$

7.4. Demuestra por el método de inducción matemática la identidad: $1\cdot 4 + 2\cdot 7 + 3\cdot 10 + \ldots\ldots + \mathbf{n}(3\mathbf{n}+1) = \mathbf{n}(\mathbf{n}+1)^2$



8. LOS REPARTOS Y EL TALMUD

El reinado de Alfonso XII (1252 -1284) fue un periodo de intensa actividad científica y literaria dirigida por el mismo rey. Tuvo lugar un proceso de asimilación del conocimiento islámico y de recuperación de las obras griegas creándose una cultura en la que intervienen pensadores musulmanes, cristianos y judíos. Este proceso se desarrolló en especial en la **escuela de traductores de Toledo**, donde se tradujeron las principales obras filosóficas y matemáticas, como el Álgebra de Al-Jwaritzmi, el Canon de Avicena, Los elementos de Euclides y también el Talmud.

El **Talmud** es un documento de dos mil años de antigüedad que forma la base de la religión judía así como también de la ley criminal y civil. El Talmud está formado por dos tipos de enseñanzas: el Mishna y el Gemara. El Mishna recoge declaraciones cortas y muy concisas de la ley y el Gemara recoge comentarios y explicaciones sobre el Mishna.

Moshé Ben Maimon (1135-1204), también conocido como **Maimónides**, escribió un famoso comentario sobre el Mishná. Fue obligado a alejarse de su España natal por las persecuciones y se asentó en Egipto, donde trabajó en una importante recopilación de las leyes del Talmud.

En el Talmud aparecen ejemplos de un tipo de problemas que llamamos de bancarrota y que se producen cuando una persona o empresa no dispone de suficientes fondos para pagar a sus acreedores y hay qué decidir cómo efectuar el reparto entre los acreedores.

En notación matemática un **problema de bancarrota** se expresa como un par (E, r) dónde $E \rightarrow R^+$ son los fondos para repartir y $r = (r_1, r_2, ..., r_n)$es lo que piden cada uno de los n acreedores.

Se supone que lo que piden los acreedores es superior a lo que hay para repartir (sino no habría problema), es decir:

$$\sum_{=1} \mathbf{r_i} \geq \mathbf{E}$$

Vamos a ver distintas formas de efectuar el reparto:

Regla Proporcional

Reparte el capital proporcionalmente a las demandas de los acreedores, la definimos P(E,r), de forma que a cada acreedor le corresponde:

$$\mathbf{P_i}(\mathbf{E}, \mathbf{r}) = \overline{\sum} \cdot \mathbf{E} \text{ dónde } \sum \mathbf{r_i} \rightarrow 0$$

8. LOS REPARTOS Y EL TALMUD

Ejemplo:

Imagina que una empresa ha quebrado y hay tres acreedores que reclaman r_1=50 € r_2=150 € y r_3=200 € pero el patrimonio a repartir es sólo de 300 euros ¿qué parte le corresponde a cada uno?

$$\mathbf{P}_1 = \frac{50}{400} \cdot 300 = 37'5 \text{ €}$$

$$_2 = \frac{150}{400} \cdot 300 = 112'5 \text{ €}$$

$$\mathbf{P}_3 = \frac{200}{400} \cdot 300 = 150 \text{ €}$$

El siguiente ejemplo aparece en el Talmud:

8.1. Un hombre muere dejando tres mujeres con un contrato de casamiento cada una dónde se especifica que en caso de muerte habrían de recibir 100, 200 y 300 respectivamente. Dependiendo de cuál es el patrimonio a repartir, el Talmud recomienda las siguientes soluciones:
Si el patrimonio a repartir es de 300 el reparto es proporcional.
Averigua que parte le corresponde a cada una de las esposas en este caso.

Regla Proporcional de los Derechos Truncados

Es parecida a la anterior, pero reparte proporcionalmente a los derechos truncados por el patrimonio:

$$(,) = \frac{\mathbf{r}^t_i}{\sum \mathbf{r}^t_i} \cdot$$

$$\mathbf{r}^t_i = \min(\mathbf{r}_i, \mathbf{E}) \text{ dónde } \sum \mathbf{r}_{i \to 0}$$

A cada acreedor le asigna para calcular las proporciones lo que demanda si es menor que el patrimonio y si es mayor le asigna el patrimonio.

Imagina que quieres repartir un patrimonio de 200 entre tres acreedores que piden 50, 100 y 300.

$$\mathbf{r}^t_1 = \min(50,200) = 50$$

$$\mathbf{r}^t_2 = \min(100,200) = 100$$

$$\mathbf{r}^t_3 = \min(300,200) = 200$$

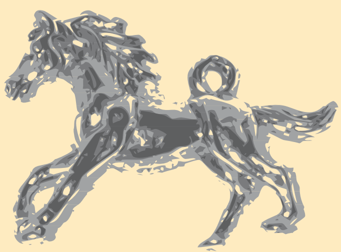
Luego el reparto será de:

$$50 + 100 + 200 = 350$$

$$\mathbf{PT}_1 = \frac{50}{350} \cdot 200$$

$$\mathbf{PT}_2 = \frac{100}{350} \cdot 200$$

$$\mathbf{PT}_3 = \frac{200}{350} \cdot 200$$



Regla Igualitaria

Reparte el patrimonio en partes iguales: (,) = $\frac{E}{n}$
dónde n es el número de acreedores.

8.2. El Talmud recomienda la regla igualitaria en el problema 8.1. cuando el patrimonio es de 100, el Talmud. Calcula cuánto le corresponde en este caso a cada una de las mujeres.

Regla Igualitaria Restringida

> Reparte el patrimonio en partes iguales, pero evitando que alguno de los acreedores reciba más de lo que le corresponde:
>
> $$IR_i(\mathbf{E},\mathbf{r}) = \min(r_i,\lambda) \text{ donde } \lambda \text{ es tal que } \sum \min(\mathbf{r_i},\lambda) = \mathbf{E}$$

Esta regla fue defendida por muchos autores, entre los que se encuentra Maimónides. Supongamos que queremos repartir un patrimonio de 90 entre tres acreedores $\frac{90}{3} = 30$ que demandan 20, 100, y 200. Si lo repartimos igualitariamente cada uno percibiría , tomaríamos $\lambda = 30$ pero de esta forma el primer acreedor recibe más de lo que pide, que es 20.

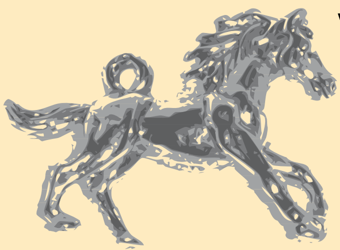
Para evitarlo, si ocurre esto, el acreedor se lleva lo que pide y volvemos a calcular λ repartiendo lo que tenemos, una vez descontado lo que corresponde al primero, entre los otros dos.

90-20=70; 70/2=35; λ=35
$\min(20,\lambda) + \min(100,\lambda) + \min(200,\lambda) = 90$
   20   35   35

Recibe cada uno: $IR_1=20$ $IR_2=35$ $IR_3=35$

Regla Igualitaria Restringida de Pérdidas

> Es la dual de la anterior, reparte igualitariamente las pérdidas, pero evitando que nadie pierda más de lo que pide:
>
> $$IRP_i(\mathbf{E},\mathbf{r}) = \max(0,\mathbf{r_i} - \lambda) \text{ donde } \lambda \text{ es tal que } \sum \max(0,\mathbf{r_i} - \lambda) = \mathbf{E}$$



Vamos a suponer que tenemos que repartir por este procedimiento un patrimonio de 200, cuando los acreedores reclaman 100, 200 y 300 respectivamente.

8. LOS REPARTOS Y EL TALMUD

Para averiguar λ dividimos las pérdidas entre los 3: $(\sum p_i - E)/3$
100+200+300=600 son las pérdidas de los tres juntos.
600-200=400 (le restamos 200 que es lo que les van a pagar).
Posible λ = 400/3=133.
Pero el primer acreedor no puede perder más de lo que pide, que es 100, luego él perderá 100.
Recalculamos de nuevo el posible λ, pues el anterior no nos vale:
500-200=300; 300/2=150; Posible λ=150
El segundo y el tercero perderán 150 cada uno. Calcularemos cuánto gana cada uno:

$\max(0;100-\lambda)$	+	$\max(0;200-\lambda)$	+	$\max(0;300-\lambda)$	=	200
0	+	50	+	150	=	200

El primero gana 0, el segundo 50 y el tercero 150.

8.3. Un señor gana a la lotería y va a repartir el décimo entre sus amigos que reclaman 50, 150 y 200 €, pero ha decidido regalar casi todo el premio para una obra benéfica y sólo le quedan 100 €. Si hace el reparto según La regla igualitaria restringida de pérdidas, ¿qué le corresponde a cada uno?

Regla del Talmud

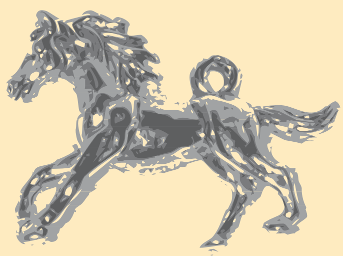
Esta regla es parecida a una que aparecía en el Talmud:
Para repartir hay que hacer lo siguiente:

Si $\quad \frac{\sum \mathbf{r}_i}{2} \geq \mathbf{E} \quad = \min(\frac{}{2},\lambda)$

λ tal que $\quad \sum \min(\frac{}{2},\lambda) = \mathbf{E}$

Si entonces $\quad \frac{\sum \mathbf{r}_i}{2} \leftarrow \quad \mathbf{t}_i = \mathbf{r}_i - \min(\frac{}{2},\lambda)$

λ tal que $\quad \sum \left(\mathbf{r}_i - \min(\frac{}{2},\lambda) \right) =$



8. LOS REPARTOS Y EL TALMUD

Caso primero:

Si $\sum 2 \geq$ $t_i = \min(\frac{r_i}{2},\lambda)$

λ tal que $\sum \min(\frac{r_i}{2},\lambda) =$

Por ejemplo, tenemos:

Vamos a pensar que tenemos que repartir un patrimonio de 200 entre tres acreedores que piden 100, 150 y 300.

$r_1 = 100$

$r_2 = 150$

$r_3 = 300$

y la cantidad a repartir es E=200

Lo primero que hacemos es sumar lo que piden entre los 3, y lo dividimos entre 2:

$$\frac{100 + 150 + 300}{2} = 275 \rightarrow 200$$

Lo ideal sería que cada uno recibiera al menos la mitad de lo que pide, pero no hay suficiente, entonces se reparte de forma que todos reciban al menos la mitad de lo que pide el menor y ese no recibe más. Luego se reparte lo demás hasta que todos tengan la mitad de lo que pide el segundo etc.

$$t_1 = \min(50;\lambda) \quad t_2 = \min(75;\lambda) \quad t_3 = \min(150;\lambda)$$

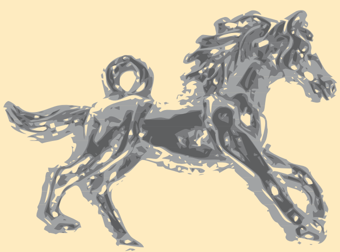
Si repartimos por igual lo que hay entre los tres $\frac{200}{3} = 66{,}6 = \lambda$

Al primero le correspondería min(50; 66,6) = 50 pues no puede ganar más de lo que pide, entonces le damos 50 y recalculamos el λ.

Repartimos lo que queda entre los otros dos:
200 – 50 = 150; 150/2 = 75 = λ y el segundo y tercero ganan 75.

$t_1 = 50$ $t_2 = 75$ $t_3 = 75$

Nos estamos asegurando de que todos reciban la mitad de lo que les corresponde. Reparten hasta que todos tienen la mitad de lo que pide el primero, luego los otros dos reparten hasta que tengan la mitad de lo que pide el segundo, etc.



Caso segundo:

Si entonces $\sum 2 \leftarrow \mathbf{E}$ $= - \min(\frac{r_i}{2},\lambda)$

λ tal que $\sum \left(- \min(\frac{r_i}{2},\lambda) \right) = \mathbf{E}$

Por ejemplo, tenemos:

8. LOS REPARTOS Y EL TALMUD

$E=290$ y $r_1=50$ $r_2=100$ $r_3=300$

$$\sum 2 = \frac{450}{2} \leftarrow 290$$

Cada uno puede ganar la mitad de lo que pide y el resto se lo pueden repartir (repartiendo las pérdidas).

T_1 $= 50 - \min(25,\lambda)$
T_2 $= 100 - \min(50,\lambda)$
T_3 $= 300 - \min(150,\lambda)$

A cada uno le quitamos como máximo la mitad de lo que pide, luego garantizamos que recibe al menos la otra mitad de lo que pide. p_i es la pérdida del individuo i.

$\sum p_i - E$ es lo que pierden entre los tres
$50 + 100 + 300 = 450$ $450 - 290 = 160$

Si se reparten las pérdidas por igual, cada uno pierde $\frac{160}{3} \cong 53$, luego $\lambda = 53$ y el primero y el segundo perderían más de lo que deben. Entonces el primero pierde 25 y el segundo 50 y lo que queda le corresponde al tercero.

T_1 $= 50 - \min(25,\lambda) = 25$
T_2 $= 100 - \min(50,\lambda) = 50$

Como los dos primeros se quedan con la mitad de lo que les corresponde, recalculamos
$\lambda = 160 - 25 - 50 = 85$
T_3 $= 300 - \min(150,\lambda) = 300 - 85 = 215$

Si todavía quedara algo que repartir, lo repartirían entre todos a partes iguales.

8.4. El problema del Talmud 8.1. cuando el patrimonio es de 200 lo reparte de esta forma. Intenta calcularlo.

El problema del Talmud está propuesto hace 2.000 años, pero en la actualidad los repartos siguen siendo fundamentales. En la unión europea, la producción láctea es una de las actividades económicas más importantes, la producción no es uniforme en todos los países y con el fin de estabilizar el mercado se utiliza el sistema de cuotas lácteas. Se fija la cantidad máxima de producción de la UE y basándose en esa cantidad limita la producción de cada estado. El problema de asignar una cantidad de producción a cada país se modeliza mediante este tipo de problemas de bancarrota.

9. LA BARRACA VALENCIANA

La feraz huerta valenciana, que se extiende a lo largo de la costa, desde Carcagente hasta Sagunto, tiene zonas, como la de La Albufera, de características muy acusadas. La vivienda rural es la barraca, y en ella podemos distinguir los siguientes tipos: la barraca de huertanos, en la huerta propiamente dicha; la de pescadores, en la playa, y en La Albufera las dos modalidades.

El clima de Valencia y la fertilidad de sus tierras permiten varias cosechas al año, con un sistema de explotación intensiva que precisa una constante atención. Este es el motivo de que el huertano construya su vivienda al pie de su parcela, empleando, casi únicamente, con sentido de la máxima economía, los materiales que brinda la naturaleza: cañas, barro, juncos y carrizos.

La barraca de la huerta responde a un tipo muy definido, que apenas ha sufrido variación con el paso del tiempo. Es de planta rectangular, de unos 9 x 5,50 m., y cubierta a dos aguas con caballete perpendicular a la fachada —casi siempre orientada al mediodía—, que está en uno de los lados menores.

La distribución es siempre parecida: una puerta, situada a un lado de la fachada, da acceso a un amplio paso, que recorre toda la longitud de la barraca y termina con otra puerta en la fachada opuesta, para facilitar la circulación de aire. Este corredor sirve de cocina, estancia y almacén de aperos.

En la otra crujía se distribuyen los dormitorios, generalmente tres. Al desván o andana, que antiguamente se destinaba a la cría de gusanos de seda, se sube por una escalera de mano.

Las paredes, de unos 2,50 m. de altura, se hacen con adobes, llamados gasons, que se colocan en asta entera o en media asta, según la economía que se persiga.

La cumbrera de la cubierta se remata con una cruz de madera en cada extremo. De este remate en cruz se ha escrito que, en el siglo XVI, pregonaba la calidad de cristianos viejos de los moradores de la barraca, frente a las habitadas por moriscos. Pero no hay pruebas suficientes para mantener esta teoría y, al parecer, se trata simplemente de un símbolo piadoso.

9.1. En las afueras de la ciudad donde vive Pedro, hay una barraca muy antigua. Según se dice, el tejado de esta barraca se construyó de tal manera que el agua permaneciera en ella el menor tiempo posible. Calcula la inclinación que tiene el tejado.

Nota:
La ecuación que expresa la distancia recorrida por un cuerpo que se mueve con movimiento uniformemente acelerado es:

$s = s_0 + v_0 t + 1/2 g t^2$ donde:

- s_0 : posición inicial del cuerpo
- v_0: velocidad inicial del cuerpo
- g: aceleración gravitatoria

La figura te ayudará a resolver el problema.

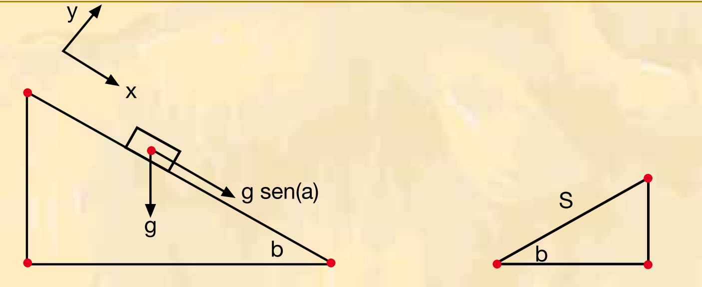


figura 1 figura 2

9.2. La siguiente tabla muestra las temperaturas medias dentro de la barraca anterior a lo largo del primer semestre de este año:

	E	F	M	A	M	J
Temperatura Máx. (x)	16	17	19	19	21	25
Temperatura Mín. (y)	7	10	12	13	15	19

a) Calcula el coeficiente de correlación lineal. ¿Qué tipo de relación estadística existe entre las variables?
b) Determina la recta de regresión de y sobre x.
c) Para una temperatura máxima de 22° C. ¿Qué temperatura mínima cabe esperar? ¿y para una temperatura de 40° C?
d) Para una temperatura mínima de 15° C. ¿Qué temperatura máxima cabe esperar?

9.3. Encima de la cumbrera de la barraca anterior, hay una cruz de madera cuyo tamaño se desea conocer. Para ello se ha lanzado una visual a la base de la cruz desde una cierta distancia, formando esta visual un ángulo de 60° con la horizontal. A continuación se ha lanzado otra visual al extremo superior de la cruz, siendo 61,5° el ángulo que esta visual forma con la horizontal. Sabiendo que la cumbrera se encuentra a una altura de 5 m. respecto del suelo. ¿Cuál es la longitud de la cruz?

10. LA CLEPSIDRA: RELOJ DE AGUA

Uno de los inventos que más asombraba a las gentes que visitaban Toledo era el de dos clepsidras (relojes de agua) construidas por el astrónomo **Azarquiel** a las orillas del Tajo; estas clepsidras eran dos estanques que se llenaban coincidiendo con el plenilunio y se vaciaban con la luna nueva, de modo que los musulmanes de Toledo conocían por ellas el día del mes (los musulmanes se guiaban por meses lunares) y la hora. Los poetas las cantaron y algún ilustre visitante las calificó de «lo más maravilloso y sorprendente que hay en Toledo y que no tiene igual en el mundo habitado». En el año **1133**, un rey de Castilla quiso conocer los secretos del artificio y un astrónomo judío se ofreció a desmontar una de las clepsidras y a mejorarla, pero fracasó en su intento y la clepsidra no volvió a funcionar. La otra desapareció más tarde, y de ella no queda rastro, como no ha quedado de otros muchos artificios construidos por los ingeniosos sabios árabes.

En el caso de un depósito cilíndrico la disminución de la altura del agua no es uniforme en el tiempo. Debido a la ley de Torricelli desciende más rápido cuando el depósito está lleno y más lentamente cuando está casi vacío de acuerdo con la fórmula:

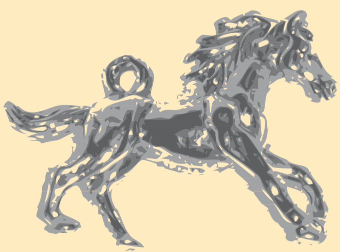
Para conseguir que el agua disminuya su altura intervalos iguales en tiempos iguales debemos cambiar la forma del depósito. Así haciendo unas sencillas marcas en la pared del mismo conseguiremos que se pueda utilizar como "reloj de agua" o "clepsidra".

La forma del depósito es el obtenido al girar la curva $y = Ax^4$ alrededor del eje de ordenadas.

10.1. Representa la función para distintos valores del parámetro A y comenta los resultados.

10.2. La función que da el volumen en función de la altura es:

y la del cilindro de radio igual al de la sección máxima de la "clepsidra" es: $V_{cilindro} = \pi \cdot R^2 \cdot H$. Ten en cuenta que en la clepsidra $H = A \cdot R^4$. Calcula que porcentaje de agua puede almacenar la "clepsidra" respecto del cilindro.



10. LA CLEPSIDRA: RELOJ DE AGUA

10.3. Una "clepsidra" posible es aquella que tenga una altura de 50 cm. y que su constante sea A=0,0002. La clepsidra se llena hasta los 48 cm. para evitar que desborde. Queremos que sirva para medir la duración de un día.

Construye en una hoja de cálculo la tabla que recoja cada dos centímetros: el radio de la clepsidra, el volumen de la clepsidra, el volumen del cilindro asociado, la relación entre volúmenes y la variación de volumen en la clespidra cada dos centímetros de altura al ir vaciándose.

10.4. La propiedad característica de esta clepsidra es que el tiempo transcurrido es directamente proporcional a la pérdida de altura del depósito: $t=k(H_0-H)$.

Determina el valor de "k" para que cada 2 cm. de altura suponga 1 h. de tiempo. Representa la función.

10.5. El volumen obtenido al girar un tramo de curva y=f(x) entre x=a y x=b alrededor del eje x se obtiene mediante el cálculo integral: $. = \pi \int_a \mathbf{y^2dx}$

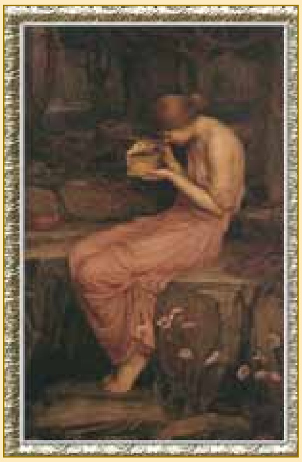
a) Considera la curva de la clepsidra "tumbada". Para ello obtén su función recíproca.

b) Aplica esta fórmula para obtener el volumen de la clepsidra en función de la altura de agua.

LAS ISLAS

FICHAS DE TRABAJO. ÍNDICE DE CONTENIDOS		
ACTIVIDAD	**BLOQUE**	**CONTENIDOS**
1. La caja de Zeus	-Análisis	-Representación gráfica de funciones -Derivada de una función -Características básicas de funciones
2. Tablillas baratas	-Análisis	-Derivada de una función
3. Ansiosos por llegar	-Geometría	-Razones trigonométricas de un ángulo -Resolución de triángulos rectángulos
4. El carbono 14	-Análisis -Álgebra	-Ecuaciones logarítmicas -Representación gráfica y características básicas de la función exponencial
5. La esfinge	-Análisis	-Combinatoria
6. El caballo de Troya	-Estadística y probabilidad	-Área de la superficie de un cilindro y de un cono -Magnitudes directamente proporcionales
7. Ulises en la isla de Aea	-Geometría	-Sistemas de referencia en el plano -Distancias entre puntos del plano -Ecuación de la recta. Perpendicularidad
8. El minotauro	-Resolución de problemas -Álgebra	-Razonamiento por reducción al absurdo -Números reales
9. Seduciendo a los argonautas	-Estadística y probabilidad	-Diagrama de árbol. -Probabilidad total -Probabilidad compuesta Teorema de Bayes
10. Civilización en las islas griegas	-Geometría	-Teorema del coseno -Teorema del seno

1. LA CAJA DE ZEUS



Zeus se disgustó con Prometeo por darles el fuego a los hombres, ya que con él podrían compararse con los dioses. Como castigo, Zeus creó a Pandora (que significa "todos los dones"), una mujer que le haría sufrir como hombre, ya que no podría vivir con ella, ni sin ella. Prometeo, que intuyó la trampa, no la aceptó, pero su hermano Epimeteo se enamoró en cuanto la vio. Cuando Pandora bajó a la tierra, los dioses le otorgaron regalos, de entre los cuales, destacó una caja que le advirtieron que nunca abriera. Pandora no pudo resistir la curiosidad y abrió la misteriosa caja de la que escaparon innumerables males para el hombre.

Cuando Zeus decidió hacer la caja, sólo tenía una cosa clara, que quería que su base fuera cuadrada. Tomó un cartón de un metro por un metro y empezó a hacer pruebas sin tener en cuenta la tapa.

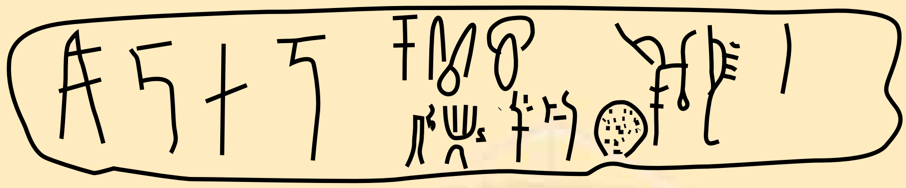
1.1. Construye para Zeus una función que indique la superficie de la caja (sin tapa) según hacemos variar el tamaño de la base.

1.2. Dibuja la función e indica sus características más importantes.

1.3. Calcula el tamaño de la base para que el volumen que encierre la caja sea máximo.

2. TABLILLAS BARATAS

Las antiguas civilizaciones griegas tuvieron dos tipos de escritura silábica, la más antigua llamada Lineal A, todavía no traducida, y la Lineal B, la cual sí se ha tenido la fortuna de descifrar, aunque las únicas tablillas que se han conservado, hacen referencia a apuntes contables y no nos han permitido profundizar en tan interesantes culturas.



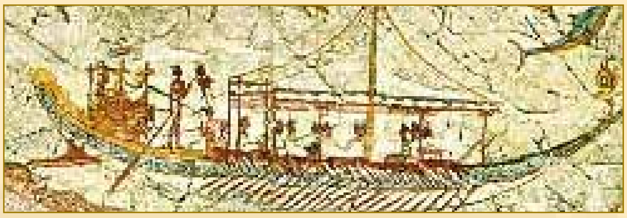
Las tablillas donde escribían eran de arcilla, si suponemos que debían contener 40 cm^2 de texto, que los márgenes superior e inferior debían ser de 4 cm. cada uno y los laterales de 2 cm., halla las dimensiones de la tablilla para que el gasto de arcilla sea mínimo.

ka - ko	*pa - ka- na*	*ti - ri -po*	*i - je -re -ja*	*qa - si - re - u*
bronce	espadas	trípode	sacerdotisa	jefe
po - me	*tu - ka - te*	*ko - wo*	*re - wo - to - ro - ko - wo*	
pastor	hija	niño	desaguadores	

3. ANSIOSOS POR LLEGAR

La civilización minoica desarrolló una gran flota comercial gracias, sobre todo, a la paz reinante y a la especialización laboral, apareciendo gremios como los de tejedores, curtidores, alfareros, orfebres, etc.

Su área comercial se expandió por todo el Mar Egeo, lo que produjo su extensión cultural y la posterior influencia en las distintas civilizaciones desarrolladas en estas zonas geográficas.



Después de un largo viaje vendiendo mercancías, por fin desde el barco, ya vislumbran la isla de Creta. Están ansiosos por llegar y les gustaría saber a que distancia están de ella.

Observan un acantilado justo al lado del puerto donde van a desembarcar. Como llevan un astrolabio (instrumento de medida de ángulos de origen incierto usado en la antigüedad), miden que el ángulo que forma el acantilado con la horizontal es de 10° y 500 m. después vuelven a medir el ángulo que entonces es de 15°.

3.1. ¿A qué distancia están de la isla de Creta? ¿Cuánto mide el acantilado?

3.2. De pronto se para el viento y deciden ir a remo, si la velocidad máxima que pueden alcanzar con las bodegas llenas es de 1,5 km/h., ¿cuánto tardarán, como mínimo, en llegar a la isla si no cambian las condiciones climáticas?

4. EL CARBONO 14

El carbono 14 es un isótopo del carbono presente en los organismos vivos, que permanece constante hasta que el ser muere. A partir de ese momento, la concentración de ese isótopo comienza a disminuir, convirtiéndose en nitrógeno, según una función exponencial conocida:

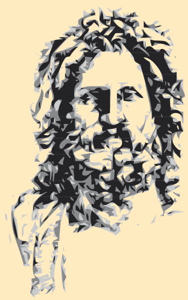
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}^{-\frac{0{,}693 \cdot \mathbf{t}}{5.570}}$$

donde **t** es el tiempo en años, **A** es la desintegración por minuto del carbono 14 en un fósil en la actualidad y $\mathbf{A_0}$ es la desintegración por minuto de carbono 14 del resto fósil en vida.

Pero este método tiene sus limitaciones, sólo es válido para un determinado intervalo de tiempo hasta 40.000 ó 50.000 años, las condiciones que rodean al fósil pueden cambiar la concentración de dicho isótopo, etc.

4.1. Sabiendo que la civilización minoica se desarrolló entre el 2000 y el 1450 a.C. y la micénica entre el 1450 y el 1100 a.C., indica a que periodo corresponden dos restos encontrados en las islas Cícladas, cuya desintegración por minuto en vida de ambos, es de 14 y al analizar los restos fósiles tienen desintegraciones por minuto de 8,94 y de 9,40, respectivamente.

4.2. Representa gráficamente la función para unos restos fósiles cuya desintegración por minuto en vida debe ser 14. Realiza un estudio de los elementos más significativos de la gráfica.



5. LA ESFINGE

Se creía que la Esfinge era un monstruo femenino al que se le atribuía rostro de mujer; pecho, patas, y cola de león; y además tenía alas como un ave de rapiña. La esfinge estaba situada en una roca a la entrada de Tebas, y desde allí devoraba a todos los viajeros que no eran capaces de resolver sus enigmas. Edipo fue el único capaz de superar el reto.

El primero que le planteó fue: ¿Cuál es el ser que anda primero con cuatro patas, luego con dos, y después con tres patas? La respuesta es el Hombre, pues gatea cuando niño, camina de adulto y de viejo anda con bastón.

El segundo fue: Hay dos hermanas una de las cuales engendra a la otra, y ésta a su vez engendra a la primera. La respuesta al segundo son el día y la noche, pues el día en griego es femenino.

La Esfinge, ante la respuesta de Edipo, desesperada se arrojó al vacío.

5.1. Ahora debes ser tú el que resuelva el enigma que te presentamos: la resolución de los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x-3}+9}{\sqrt{x+5}-4}$

b) $\lim_{x \to \infty} \sqrt{7x+1}-\sqrt{7x-1}$

c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{tg(sen(senx))}{tg(senx)}$

d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{2x^2}$

6. EL CABALLO DE TROYA

En la Iliada, Homero desarrolló el relato de la guerra de Troya, que data, según fuentes fiables, del siglo XII a.C. El detonante de tan sangriento conflicto fue el rapto de Helena, esposa del rey de Esparta, Menelao, por Paris, príncipe troyano. Al mando de Argamenón, rey de Micenas y hermano de Menelao, guerrearon frente a Troya durante diez largos años, hasta que una idea brillante dio a los sitiadores la victoria.

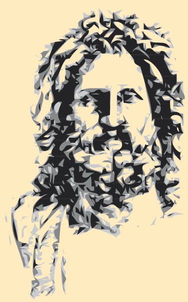
Construyeron un caballo de madera en el que se introdujeron hombres, lo dejaron en las puertas de Troya como tributo a los vencedores y se retiraron de su vista. Los troyanos, engañados, metieron el caballo en la ciudad y esa misma noche los intrusos saltaron de él y abrieron las puertas de Troya a sus ejércitos, obteniendo así la victoria.

6.1. Para celebrar la derrota de los troyanos, los espartanos al día siguiente hicieron un banquete.

a) Si a la fiesta asistieron 57 personas y se intercambiaron saludos entre todos, ¿cuántos saludos se intercambiaron?

b) Si en la presidencia se podían sentar sólo la familia directa de los reyes Menelao y Helena, que eran 10 personas (incluyéndose ellos), ¿de cuántas formas se podían sentar para que los reyes estuvieran juntos?

c) ¿De cuántas formas se podían colocar las 10 personas, si los dos reyes tenían que quedarse en los extremos?



7. ULISES EN LA ISLA DE AEA

En uno de sus viajes, Ulises llegó a la isla de Aea, donde vivía la maga Circe, hija del Sol y de la Perseida. Vivía sola con sirvientes y metamorfoseaba en animales a todos los viajeros que llegaban a su palacio. Ulises, sin saber lo que le esperaba, envió a sus hombres a explorar. La maga les transformó en lobos, en perros... mientras Ulises buscaba a sus hombres, Hermes lo abordó y le dio el secreto para poder salvar a los suyos:

“En esta isla hay solamente un obelisco, un panteón y los restos de una embarcación que naufragó hará una semana. Cuenta los pasos que hay desde esta embarcación hasta el obelisco, gira 90° a la izquierda y camina al frente el doble del número de pasos, allí clava una estaca en el suelo. Vuelve a la embarcación, cuenta los pasos que hay desde ella hasta el panteón y cuando llegues a él, gira 90° a la derecha. Camina entonces al frente el doble del número de pasos que acabas de dar, allí clava otra estaca en el suelo. Tus compañeros están en el punto medio de las estacas”.

Cuando Ulises comenzó a buscar vio que estaban el obelisco y el panteón de los que Hermes había hablado, pero no encontró ni rastro de la embarcación que naufragó. ¿Sabrías tú localizar el lugar donde se hallan los compañeros de Ulises en esta aventura?

8. EL MINOTAURO

El minotauro es un ser mitológico con cabeza de toro y cuerpo de hombre, que el rey de Creta, Minos, encerró en un laberinto y se alimentaba con jóvenes víctimas humanas.

Como venganza por la muerte de su hijo, el rey obligó a la ciudad de Atenas a entregarle jóvenes con los que alimentar a este monstruo, con la condición de que si uno de ellos conseguía matar al Minotauro y salir del laberinto, Atenas se vería eximida de tan horrible obligación.

Doria, una joven doncella de la isla de Paros, fue obligada a ser alimento de tan cruel ser. Doria llegó al centro del laberinto, donde había un patio cuadrado de 50 m. de lado. El minotauro paseaba recorriendo el perímetro del cuadrado con una velocidad constante, y la joven lo hacía sobre una de las diagonales con la misma velocidad. Si ambos partieron simultáneamente del mismo vértice, ¿se comió el minotauro a Doria?

9. SEDUCIENDO A LOS ARGONAUTAS

Jasón convocó a todos los héroes que desearon seguirle a la cólquide en busca del "vellocino de oro" y, tras reunir a los más valerosos emprendió el viaje en el navío "Argo", que significa veloz. A partir de ese momento, la tripulación recibió el nombre de argonautas. El viaje de Jasón y los argonautas tuvo su primera escala en la isla de Lemnos, donde solamente habitaban mujeres, las cuales sedujeron a los argonautas para que se quedaran con ellas durante algún tiempo.

Para tal fin, organizaron un magnífico festín, prometiéndoles a todos el manjar divino, la ambrosía, que proporcionaba inmortalidad. Toda la tripulación aceptó jubilosamente dicha proposición.

Así, a Jasón, las mujeres le ofrecieron tres bandejas: una de oro, que contenía 4 copas; la segunda de plata, con 6 copas; y otra de bronce con 9 copas, de las que sólo una de cada bandeja contenía ambrosía. Jasón elige al azar una bandeja y, de ella, una copa para intentar beber la ambrosía:

9.1. ¿Cuál será la probabilidad de que Jasón beba dicho manjar?

9.2. ¿Cuál será la probabilidad de que la bandeja escogida sea la de bronce y la copa no contenga ambrosía?

9.3. Si la copa escogida contiene la bebida divina, ¿cuál será la probabilidad de que pertenezca a la bandeja de oro?

10. CIVILIZACIÓN EN LAS ISLAS GRIEGAS

En tiempos inmemorables se desarrollaron en la cuenca del Mar Egeo unas singulares civilizaciones, principalmente en las Islas Cicladas, en Creta, en el centro de Grecia y en la costa de Asia.

Las culturas principales aquí desarrolladas fueron: la cicládica, en las Islas Cicladas; la minoica, que floreció en Creta y alcanzó su esplendor a mediados de la edad de bronce (2000-1450 a.C.); y la micénica, que se extendió a finales de la edad de bronce (1450-1100 a.C.), desde su centro en Micenas hasta lugares como Tirinto y Pilos.

Dos de estas importantes islas, Melos y Naxos, están unidas por puentes rectos y llanos al puerto de El Pireo, en Atenas. La distancia entre Melos y El Pireo es de 180 km., la distancia entre Naxos y El Pireo es de 210 km. y el ángulo que forman los puentes que unen Atenas con Naxos y Atenas con Melos es de 35°.

10.1. ¿Cuánto distan entre sí Melos y Naxos?

10.2. ¿Cuál es el ángulo que forman los puentes que unen Melos con Atenas y Melos con Naxos?

SOLUCIONES

1. EL VOLUMEN DE LA PIRÁMIDE

1.1. $\mathbf{V}_{tronco} = \frac{\mathbf{h}}{3}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \sqrt{a^2b^2}) = \frac{\mathbf{h}}{3}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{ab})$

2. EL PASEO DE LA MUSARAÑA

2.1. Los triángulos DEB y CFA son semejantes.

Se cumple, por tanto: $\frac{DE}{BD}=\frac{CF}{AC}$. Además DE = AF, con lo cual, tendríamos que $BD = \frac{AC\cdot DE}{CF} = \frac{AC\cdot AF}{CF}$.

Según Pitágoras $AC=\sqrt{CF^2+AF^2}=\sqrt{2{,}25^2+6{,}2^2}=6{,}6$ m.

Por consiguiente, $BD = \frac{6{,}6\cdot 6{,}2}{2{,}25} = 18{,}19$ m. La musaraña egipcia ha recorrido 18,19 metros.

3. LOS TENSADORES

3.1. Otras ternas pitagóricas podrían ser 6, 8, 10; 9, 12, 15; 12, 16, 20; ... 3n, 4n, 5n.

3.2. Sirve cualquier pareja de números impares primos entre sí: m=5 y n=7.

4. ¡QUÉ FRACCIÓN!

4.1. Las soluciones son 3/4 = 1/2 + 1/5 + 1/20 y 3/4 = 1/2 + 1/6 + 1/12. Para realizar otras descomposiciones te recuerdo que 1 = 1/2 + 1/3 + 1/6, o también, puedes usar el hecho que cualquier fracción de la forma 1/a = 1/(a+1) + 1/a(a+1). Hay infinitas soluciones.

5. LAS FRACCIONES EGIPCIAS Y LA ELECTRÓNICA

5.1. Para el primer circuito la resistencia de 6 Ohmnios, la conseguimos con otras dos en paralelo: R_1= 10 Ohmnios y R_2 = 15 Ohmnios.
Para el segundo de 20 Ohmnios con dos resistencias en paralelo: R_1= 22 Ohmnios y R_2 = 220 Ohmnios. Y para el tercero 30 Ohmnios con otras dos: R_1= 33 Ohmnios y R_2 = 330 Ohmnios. Intenta otras combinaciones, aunque utilices más resistencias. Apóyate en el problema anterior.

6. EL CONSTRUCTOR DE PIRÁMIDES

6.1. Como α es el ángulo entre la base y cualquiera de sus caras, será, $\mathbf{seqt} = \text{cotg}\alpha = \frac{l/2}{\mathbf{h}} = \frac{180}{250} = \frac{18}{25}$ (siendo l = lado de la base ; **h** = altura de la pirámide). Aunque los egipcios expresaban el cateto horizontal (l/2) en **palmos**, y el vertical (h) en **codos**:

$$\mathbf{seqt} = \text{cotg}\alpha = \frac{180\cdot 7\,\mathbf{(palmos)}}{250\,\mathbf{(codos)}} = \frac{1.260}{250} = 5\,\frac{1}{25} \text{ palmos por codo.}$$

Además, si $\text{cot}\mathbf{g}\alpha = \frac{18}{25} \rightarrow \mathbf{tg}\alpha = \frac{25}{18} \rightarrow \alpha = 54°15'$

6.2. $seqt = \frac{\frac{l}{2}}{h} = \frac{\frac{palmos}{2}}{codos}$, donde l es el lado en **palmos** y **h** la altura en **codos**.

6.3. Como el lado de la base mide 230 m., la diagonal de la base es

$$d = \sqrt{230^2+230^2} = 325{,}7\ m. \Rightarrow \frac{d}{2} = 162{,}64\ m.$$

Y como la arista "a" mide 218,5 m., la altura de la pirámide será

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{218{,}5^2 - 162{,}64^2} = 146\ m.$$

Entonces, **seqt** = $\cot g\alpha = \frac{l/2}{\mathbf{h}} = \frac{115}{146} = 0{,}788$.

Como **tg**$\alpha = \frac{146}{115} = 1{,}27$ □

α = arc tg 1,27 = 51° 46'

Volumen = $\frac{1}{3}\mathbf{B}\cdot\mathbf{h} = \frac{1}{3}\cdot 230^2\cdot 146 = 2.574.467\ m^3$ y

Nº de bloques = $\frac{2.574.467\ \mathbf{m^3}}{8\ \mathbf{m^3}}$ = 321.808 bloques cúbicos.

7. CÓMO CALCULAR LA ALTURA DE LAS PIRÁMIDES

7.1. En el algoritmo se utiliza que un codo son 6 **palmos**, cuando en realidad son 7 **palmos**.

8. LAS INUNDACIONES

8.1. Llamemos "y" al número de personas y "x" a la altura alcanzada sobre el nivel normal en la garganta de la primera catarata del Nilo.

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{y_1 - y_0}}{\mathbf{x_1 - x_0}}(\mathbf{x - x_0}) + \mathbf{y_0}$$

Sustituyendo obtenemos:

$$\mathbf{y} = \frac{600.000 - 200.000}{8 - 6}(7{,}5 - 6) + 200.000 = 500.000.$$

Habría alimentos para 500.000 personas.

8.2. $\mathbf{y} = \dfrac{600.000 - 200.000}{8 - 6}(9 - 6) + 200.000 = 800.000.$

Habría alimentos para 800.000 personas.
Esta predicción no es fiable porque por encima de los 8 m. de crecida se inundan los poblados y terrenos no preparados para el cultivo.

9. EL GRAN MATEMÁTICO EGIPCIO

9.1. Como astrónomo inventó una trigonometría, tan completa, que sobrevivió toda la Edad Media. A partir de su teorema: "La suma de los productos de los lados opuestos de un cuadrilátero cíclico es igual al producto de las diagonales", logró desarrollar la expresión trigonométrica: sen (a ± b) = sen a cos b ± sen b cos a.

10. ¡MENUDO REPARTO!

10.1. a) El sistema a resolver es $\left.\begin{array}{l} 5\mathbf{x} + 10\mathbf{y} = 100 \\ 11\mathbf{x} - 2\mathbf{y} = 0 \end{array}\right\}$, con $\mathbf{x} = \dfrac{20}{12}$ e $\mathbf{y} = \dfrac{110}{12}$;

por consiguiente, a cada uno le correspondió $\dfrac{20}{12}, \dfrac{130}{12}, \dfrac{240}{12}, \dfrac{350}{12}, \dfrac{460}{12}$, medidas de trigo.

b) La suma total es 19.607.

3. AUNQUE TE LLAMEN BETA ERES ALFA

3.1. a) $\overline{\mathbf{AS}}$ = 5.000 **estadios** = 5.000 · 157,6 **m.** = 788.000 **m.** = 788 **km.**

b) **P** = 250.000 **estadios** = $25 \cdot 10^{4} \cdot 157{,}6 \cdot 10^{-3}$ **km.** = 39.400 **km.**

$$\frac{P}{5.000} = \frac{360^\circ}{\frac{1}{50}360^\circ} \rightarrow P = 250.000 \textit{ estadios}$$

c) **P** = $2 \cdot \pi \cdot \mathbf{r}$ = 250.000 estadios $\rightarrow$ $\mathbf{r} = \dfrac{250.000}{2 \cdot \pi}$ = 39.788,7 estadios

$\mathbf{r} = \dfrac{39.788{,}7 \cdot 157{,}6}{1.000}$ **km.** = 6.270,6 km. ≈ 6.271 **km.**

4. MEDIDAS DE CAPACIDAD

Cotila = $\dfrac{27}{100}$ = 0,27 litros

1 metreto = 144 cotilas = 144 · (0,27) = 38,88 litros

2 ánforas = 1 metreto luego ánfora = 19,44 litros

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl}
100\mathbf{x} & + & 2\mathbf{y} & + & \mathbf{z} & + & \mathbf{t} & = & 9{,}496 \\
2\mathbf{x} & + & 3\mathbf{y} & & & + & 10\mathbf{t} & = & 27{,}35 \\
200\mathbf{x} & & & + & 4\mathbf{z} & + & 3\mathbf{t} & = & 25{,}2 \\
10\mathbf{x} & + & 5\mathbf{y} & + & 3\mathbf{z} & + & 10\mathbf{t} & = & 38{,}05
\end{array}\right\}$$

ciato = x = 0,045 litros oxibafe = y = 0,068 litros

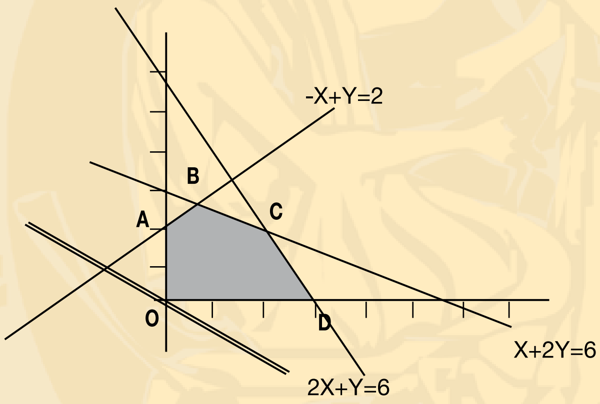
hemixion = z = 1,62 litros cous = t = 3,24 litros

5. EL TERRENO DE CLEOMEDES

Vamos a solucionarlo de forma analítica y gráfica mediante programación lineal. Llamamos y= pies x= fanegas
Y la función objetivo F= x + y que tendremos que maximizar.
Planteamos las restricciones:

$$\left.\begin{array}{r} -\mathbf{x} + \mathbf{y} \leq 2 \\ \mathbf{x} + 2\mathbf{y} \leq 6 \\ 2\mathbf{x} + \mathbf{y} \leq 6 \\ \mathbf{x} \geq 0 \ \mathbf{y} \geq 0 \end{array}\right\}$$

resolvemos

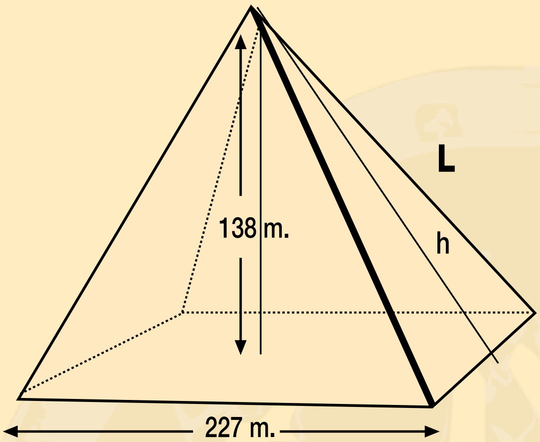


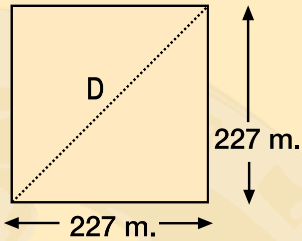
Vértices:
A = (0, 2) B = (2/3, 8/3) C = (2, 2) D = (3, 0)

Gráficamente correspondería al vértice C
Analíticamente: F(0,2) = 2
F(2/3, 8/3) = 10/3
F(2,2) = 4
F(3,0) = 3
Solución óptima x= 2 ; y= 2 Es decir, 2 fanegas y dos pies.

Pasamos a m^2= 2(870 m^2) + 2(0,87)=1.741,74 m^2

7. ARQUÍMEDES Y LA PIRÁMIDE DE KEOPS



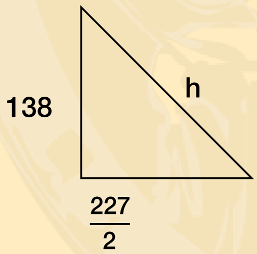


$D^2 = (227)^2 \cdot 2 \rightarrow D = \sqrt{(227)^2 \cdot 2} = 227 \cdot \sqrt{2}\ m.$

$L^2 = (138)^2 + \left(\frac{227\sqrt{2}}{2}\right)^2 \rightarrow L = 211{,}68\ m.$ $\quad S = \frac{650{,}36}{2} = 325{,}18\ m.$

$S = \sqrt{325{,}18 \cdot (325{,}18 - 211{,}68) \cdot (325{,}18 - 211{,}68) \cdot (325{,}18 - 227)} = 20.280{,}06\ m^2$

Otra forma podría ser:



$h = \sqrt{138^2 + \left(\frac{227}{2}\right)^2} = 178{,}679\ m.$ $\quad a = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{227 \cdot 178{,}679}{2} = 20.280{,}06\ m.$

En ambos casos, la superficie total = 20.280,06 · 4 = 81.120,24 **m**^{2}

8. CURIOSO DE ARQUESTRATO

a) La razón de semejanza es 1:30

1 codo = 3/2 pie = $\frac{3}{2}$ · 16 dedos = 24 dedos

$$\frac{1\textbf{codo}}{24\textbf{dedos}} = \frac{100\textbf{codos}}{80\textbf{dedos}} \rightarrow \frac{24\textbf{dedos} \cdot 100\textbf{codos}}{80\textbf{dedos}} = 30\ \textbf{codos}\ \text{en la escala 1:30}$$

Luego $\overline{\textbf{AC}} = \frac{298{,}56 \cdot 30}{24} = 373{,}2$ codos

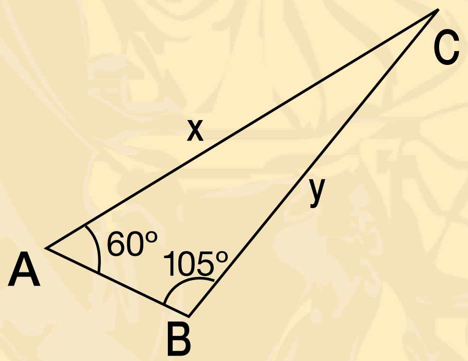
b) De otra forma:

$\hat{A} = 60^\circ$ $\hat{B} = 105^\circ$ $\hat{C} = 180^\circ - 1.050 - 60^\circ = 15^\circ$

aplicamos el teorema del seno

$$\frac{\textbf{x}}{\textbf{sen}(105)} = \frac{100}{\textbf{sen}(15)} = \frac{y}{\textbf{sen}(60)}$$

luego **x**= 373,2 codos



9. ¡BUSCA EN ESTA SOPA MATEMÁTICA!

Habrás encontrado:

		M		E	C	U	A	C	I	O	N		
		A			C		T			P		E	
	L	T			O		C			U		L	
C	I	R	C	U	N	F	E	R	E	N	C	I	A
	M	I			I		R			T		P	
	I	Z			C				A	O		S	
	T	E	T	N	A	N	I	M	R	E	T	E	D
D	E	R	I	V	A	D	A		E				
			I	N	T	E	R	V	A	L	O		

10. LOS JUEGOS OLÍMPICOS

10.1. Debido a la falta de continuidad, debemos definir una función a trozos, así si llamamos:
x: edición de los Juegos Olímpicos Modernos ($\mathbf{x} \geq 1$) y: año

$\mathbf{y} = 1.892 + 4\mathbf{x}$	**si**	$1 \leq \mathbf{x} \leq 5$
$\mathbf{y} = 1.912 + 8\,(\mathbf{x} - 5)$	**si**	$6 \leq \mathbf{x} \leq 9$
$\mathbf{y} = 1.948 + 4\,(\mathbf{x} - 9)$	**si**	$\mathbf{x} \geq 10$

10.2. Los Juegos Olímpicos se organizaron en España en su vigésima edición:
Olimpiadas de Barcelona 1992

10.3.

	Participantes
Moscú 1980	5.217
Los Ángeles 1984	6.797
Seúl 1988	8.465
Barcelona 1992	9.367
Atlanta 1996	10.750

Claramente se ha producido un incremento a lo largo de los años.

Parámetros de centralización:
Media = 8.119,2   Moda no hay   Mediana = 8.465

Parámetros de dispersión:
Rango = 5.533   Varianza = 1.937,46   Desviación Típica = 44,016

10.4.

Año	**1980**	**1984**	**1988**	**1992**	**1996**	**2000**
Ciudad	**Moscú**	**Los Ángeles**	**Seúl**	**Barcelona**	**Atlanta**	**Sydney**
Oro	1	1	1	13	5	3
Plata	3	2	1	7	6	3
Bronce	2	2	2	2	6	5
Total	6	5	4	22	17	11

En total, la media de las medallas obtenidas ha sido 10,8 medallas. Si lo hacemos por el metal conseguido, tenemos:

4 medallas de oro, 3,66 medallas de plata, 3,16 medallas de bronce.

Podemos observar que se produce una gran variación de las medallas entre las ediciones celebradas, por tanto su varianza será elevada.

1. LOS ARQUEROS MATEMÁTICOS

1.1. Con sólo ir probando en la fórmula podrían obtener una buena aproximación de la solución que se obtiene al resolver la ecuación necesaria. El ángulo α debe estar comprendido entre 30,294° y 59,706°.

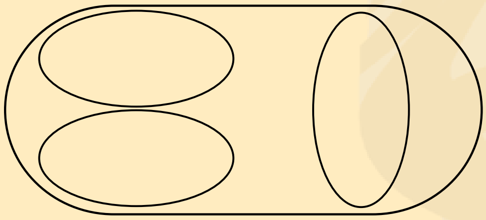
1.2. El gráfico sería una parábola, la altura va desde 0 hasta 215,24 m. de máxima y luego vuelve a bajar hasta 0 en los 497 m. que tiene de alcance.

1.3. Al menos debemos estar a 573,98 m.

1.4. Ahora debemos combinar dos posibilidades, alcance y altura. El ángulo debe estar ahora comprendido entre 56,595° y 59,706°.

2. LOS ESPECTÁCULOS

2.1. El área de la elipse es $\pi \cdot a \cdot b$. La arena del circo sería 3,89 veces más grande que la del anfiteatro; físicamente sólo se podrían construir 3 anfiteatros dispuestos como se muestra en la figura.



SOLUCIONES

2.2. Para partidos nacionales la dimensión del campo de fútbol mínima es de 90 metros de largo por 45 de ancho y en internacionales de 100 por 64. En cualquier caso, aunque el circo es casi el doble que los campos para competiciones nacionales, sólo cabe uno.

2.3. Puesto que la integral que planteamos para calcular la longitud de la elipse no tiene fácil solución, podemos obtener el aforo realizando múltiples comparaciones, aunque la más razonable parece la del perímetro, que es donde se sitúan los asientos:

•El perímetro de ambos supuestos circunferencias de diámetro $\frac{\mathbf{D+d}}{2}$, arrojaría un aforo de $\frac{310{,}86}{157} \cdot 14.000 = 27.720$ personas.

•La diagonal mayor arrojaría un aforo de $\frac{111{,}5}{61{,}5} \cdot 14.000 = 25.382$ personas.

•La diagonal menor arrojaría un aforo de $\frac{86{,}5}{38{,}5} \cdot 14.000 = 31.454$ personas.

En realidad el aforo del circo solía ser el doble que el del anfiteatro de una misma ciudad.

2.4. Aquí pueden haber multitud de respuestas. Podrían aproximar la longitud de una vuelta con el perímetro de un rectángulo; en los lados largos (223 m.) va a 60 km/h. y en los cortos (173 m.) a 30 km/h. Tardarían entonces 34,14 segundos en dar una vuelta. Otros alumnos quizás piensen que como al salir de la curva van a 30 km/h. y deben ir acelerando hasta 60 y después ir frenando hasta conseguir los 30 para dar de nuevo la curva, promedien que su velocidad en ese tramo es de 45 km/h.; en tal caso obtendrían 38,60 segundos. Si conocen las fórmulas del movimiento uniformemente acelerado también las podrían utilizar. Aquí suponiendo un movimiento uniformemente acelerado tanto para la aceleración como la deceleración en el tramo recto obtendríamos 39,24 seg. para dar la vuelta completa. Todas las soluciones que nos planteen serán válidas, siempre que expliquen el porqué de sus decisiones.

2.5. Si tomamos el perímetro del circo como una circunferencia de diámetro $\frac{\mathbf{D+d}}{2}$, serían 611 los romanos sentados en primera fila.

SOLUCIONES

3. EL PUENTE

3.1. En primer lugar debemos quitar los tres trozos de puente que no tienen arcos. En cada uno de ellos se ahorraron 5 arcos. Cada arco ocupa 6,40 metros + 5 metros del primer pilar de apoyo (el segundo apoyo es común con el segundo arco). Un tramo de 5 arcos tiene una longitud de 11,40 metros x 5 + 5 metros del último apoyo = 62 metros. Los tres tramos miden en total 186 metros y nos quedan 583 metros de puente con arcos divido en dos tramos. Restando los 10 metros que miden los dos últimos apoyos de cada tramo quedarían 573 metros de puente y cada arco ocupa en total 11,40 metros, luego tiene 50 arcos.

Si no tenemos en cuenta los últimos apoyos obtendríamos 52 arcos.

3.2. Tardaría 0,19225 horas; es decir, 11 minutos y 32 segundos.

3.3. De nuevo aquí las soluciones son múltiples. El caso más sencillo sería suponer que el puente tiene un volumen de 769 x 10 x 7 = 53.830 m^3 y necesitaríamos 640.834 sillares. Un número más cercano a la cantidad real lo obtendríamos restando "los agujeros" de los arcos. Como se aprecia en la foto su altura son algo más de la mitad, supuestos 7 metros de altura y que tenemos 50 arcos, el volumen de piedra es de 38.150 m^3; es decir, 454.167 sillares.

3.4. Si hemos calculado el volumen sin contar los arcos, necesitaríamos 5.723 camiones.

4. EL TEMPLO

4.1. Como dice que en el interior no hay columnas y suponiendo que la parte que no vemos es igual a la que vemos habrán 24.

4.2. Comparando el número de columnas que ocupan cada una, la parte cerrada es dos veces y media más grande que la terraza.

4.3. La longitud de la rampa son 9 metros.

4.4. La pendiente es del 7,29% y el ángulo 4,17°.

4.5. Podemos construir 15 escalones de 26,67 cm. de ancho.

5. VIAJE A RODAS

En esta actividad hay que organizar los datos y tomar algunas decisiones.

	1	2	3	4	5	6	7	8
Publio	IDA	IDA	IDA	IDA 3.000 2.800	VU	IDA	IDA	IDA
Máximo	IDA	IDA	IDA 4.000	VU	IDA	IDA	IDA 4.000	VU
Marco Aurelio	IDA	IDA 3.000	VU	IDA	IDA 3.000	VU	IDA	IDA 200

En este caso Máximo fue el que más dinero ganó. Llevó 4.000 ánforas a 18 sestercios y otras 4.000 a 12; en total 120.000 sestercios. Publio sólo pudo hacer un viaje y le pagaron 3.000 ánforas a 18 sestercios y 2.800 a 12; total 87.600 sestercios. Marco Aurelio hizo tres viajes y cobró 3.000 ánforas a 18 sestercios y 3.200 a 12; total, 92.400 sestercios.
Tardaron 8 días en llevar todas las ánforas.

6. CIRCUS MAXIMUS

6.1. Suponemos que el mármol cubre toda la fachada (existen los huecos de los arcos, pero los pilares y el arco también están recubiertos de mármol). Si el alumno elige descontar los "agujeros" de los arcos obtendrá un mayor grosor.
Si consideramos el perímetro como una circunferencia de diámetro de $\frac{D+d}{2}$ metros, la superficie del Coliseo es de 27.004 m², y obtendríamos un espesor de 37 cm.

SOLUCIONES

6.2. $\dfrac{300.000\ \mathbf{kg.}}{0{,}4\ \mathbf{kg.}}$ = 750.000 sillares.

6.3. Con el diámetro anterior elegido necesitaríamos 1.162 carros romanos.

7. EMBALSES Y ACUEDUCTOS

7.1. Cada habitante necesita 10.950 litros de agua al año, luego podría albergar a 152.207 habitantes.

7.2. Si no se quieren complicar, con una regla de tres relacionando habitantes con km^2 de cuenca obtienen 59,13 km^2.

7.3. Circulan 50 litros por segundo.

7.4. Tardarían 6 minutos y 40 segundos.

8. CAMPUS ESPARTARIUS

8.1. Este es un modelo sencillo de cadenas de Markov que podemos resolver planteándolo directamente o por medio de matriz de transición (todos los registros iguales a 0,5). El primer año plantó 10 Ha de Lino y 30 de esparto, en el segundo año tendrá 20 hectáreas de cada producto.

8.2. A partir del segundo año siempre producirá 20 Ha de cada uno, luego no es acertada su rotación de cultivos.

9. LOS IMPUESTOS DEL IMPERIO

9.1. Disponen de varias opciones, la ideal sería que representasen en el mismo gráfico los diferentes productos y la producción de las ciudades. Una buena opción puede ser el gráfico de múltiples barras. También podrían hacer un gráfico para cada producto y la producción de las diferentes ciudades. La tercera opción sería un gráfico para cada ciudad y todos los productos, pero éste no permitiría al emperador comparar los resultados.

9.2. Suponiendo que cada litro de aceite y de vino pesan 1 kg. En la tabla siguiente viene reflejado el transporte total que deben realizar las tres ciudades.

Líquidos (Tm)	41,8
Sólidos (Tm)	77

Problema de programación lineal que también podemos resolver directamente sin mucha dificultad. La más barata es 2 barcos de 1.000 sestercios y dos barcos de 800 sestercios. Total 3.600 sestercios. Observar que de las tres ciudades la única que sale perdiendo es Valentia que podría enviar toda su mercancía en un solo barco de 900 sestercios.

10. EL FARO DE BRIGANTIUM

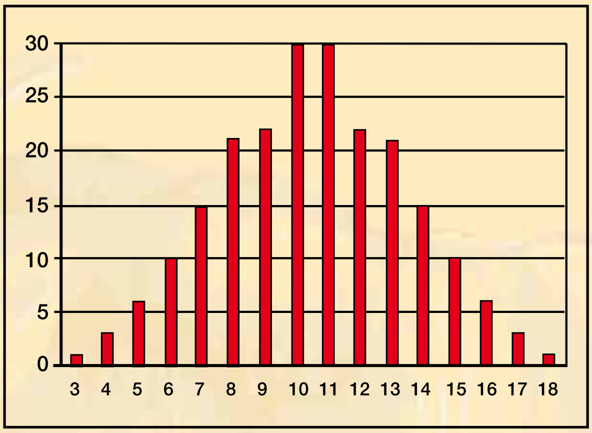
10.1. Una altura de 34,89 metros aproximadamente.

10.2. A 3.998 metros de distancia se divisa el faro.

1. JUEGOS DE DADOS: "MARLOTA" Y "RIFFA"

1.1. Se ha utilizado la hoja de cálculo Excel para responder a la pregunta.

suceso	frecuencia	probabilidad	$x_i \cdot p_i$	$x_i^2 \cdot p_i$
3	1	0,005	0,0139	0,0417
4	3	0,014	0,0556	0,2222
5	6	0,028	0,1389	0,6944
6	10	0,046	0,2778	1,6667
7	15	0,069	0,4861	3,4028
8	21	0,097	0,7778	6,2222
9	22	0,102	0,9167	8,25
10	30	0,139	1,3889	13,889
11	30	0,139	1,5278	16,806
12	22	0,102	1,2222	14,667
13	21	0,097	1,2639	16,431
14	15	0,069	0,9722	13,611
15	10	0,046	0,6944	10,417
16	6	0,028	0,4444	7,1111
17	3	0,014	0,2361	4,0139
18	1	0,005	0,0833	1,5
totales	216	1,000	10,5	118,94



media	d.típica	jugadas posibles
10,5	2,95	81,48%

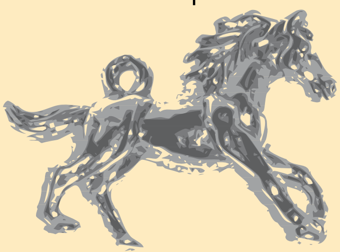
1.2. Igualmente para esta pregunta:

1.3. Para agilizar el juego se han eliminado los resultados menos probables. Hay que observar que los resultados entre 7 y el 14, ambos incluidos, suponen el 81,48% del total de los resultados posibles.

1.4. Elegiría el 10 o el 11 pues son los sucesos que ocurren con más frecuencia. Habría que elegir el 14, que igual que el 8, ocurre 21 de los 216 resultados posibles.

1.5. Se puede organizar un campeonato entre los alumnos y alumnas de la clase.

1.6. Hay seis pares iguales (1,1), (2,2),...(6,6); La probabilidad de obtener uno de esos pares es 1/36; Como la probabilidad de obtener uno cualquiera de esos pares es 6/36, cada 6 tiradas aproximadamente aparecerá un par doble.



1.7.

	suma de los tres dados																
2	3	4	5	6	7	8											6
4			5	6	7	8	9	10									6
6					7	8	9	10	11	12							6
8							9	10	11	12	13	14					6
10									11	12	13	14	15	16			6
12											13	14	15	16	17	18	6
totales	1	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	1	1	36

1.8. En el primer caso sólo gano si saco un 6 y mi contrincante un 1, y ganaría 8 a 7. Eso supone una probabilidad de 1/36.

En el segundo caso, si la suma de los tres dados son: (2+4,4+1), (2+5,4+1), (2+5,4+2), (2+6,4+1), (2+6,4+2), (2+6,4+3) gano "yo". Esto supone una probabilidad de 6/36=1/6.

1.9. Los sucesos menos probables son las sumas 3, 4, 17 y 18 con probabilidad 1/36 y las sumas 5, 6,15 y 16 con probabilidad 2/36. Eliminando estos sucesos todos los demás tienen la misma probabilidad 3/36=1/12.

1.10. Se puede organizar un campeonato entre los alumnos y alumnas de la clase.

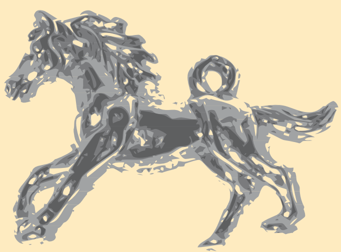
2. EL ÁLGEBRA: SAVASORDA

2.1. a) $\mathbf{a}^2 - 2\mathbf{S} = \mathbf{h}^2 + \frac{\mathbf{b}^2}{4} - 2\mathbf{bh} = \left(\mathbf{h} - \frac{\mathbf{b}}{2}\right)^2$, por tanto $\sqrt{a^2\ 2S} = \mathbf{h} - \frac{\mathbf{b}}{2}$

y finalmente $\frac{\sqrt{a^2 - 2S}}{2} = \frac{\mathbf{h}}{2} - \frac{\mathbf{b}}{4}$

b) $\frac{\mathbf{a}^2 - 2\mathbf{S}}{4} = \left(\frac{\mathbf{h}}{2} - \frac{\mathbf{b}}{4}\right)^2$ y sumando m.a.m. $\frac{\mathbf{a}^2 - 2\mathbf{S}}{4} + \mathrm{S} = \left(\frac{\mathbf{h}}{2} - \frac{\mathbf{b}}{4}\right)^2 + \frac{\mathbf{bh}}{2}$

y operando $\frac{\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{S}}{4} = \left(\frac{\mathbf{h}}{2} + \frac{\mathbf{b}}{4}\right)^2$ y finalmente $\frac{\sqrt{a^2 + S}}{2} = \frac{\mathbf{h}}{2} + \frac{\mathbf{b}}{4}$



c) Sumando ambas expresiones: $\mathbf{h} = \frac{\sqrt{a^2+2S}}{2} + \frac{\sqrt{a^2-2S}}{2}$

Restando y multiplicando por 2: $\mathbf{b} = \sqrt{a^2+2S} - \sqrt{a^2-2S}$

2.2. a) Si el lado igual mide 5 y el área 12 se tiene: h=7/2+1/2=4 y b=7+1=8.

b) Si resolvemos el sistema $12 = \frac{\mathbf{b \cdot h}}{2}$ y $25 = \frac{\mathbf{b}^2}{4} + h^2$ se obtiene la ecuación bicuadrada $\mathbf{b}^4 - 100\mathbf{b}^2 + 2.304 = 0$
que da dos soluciones b=8 y b=6.
Esto supone que las alturas son h=3 y h=4.

La solución que no aparece en la fórmula de Bar Hiyya se debe a no considerar el doble signo de las raíces cuadradas.

2.3. a) Expresando en función de b se tiene:

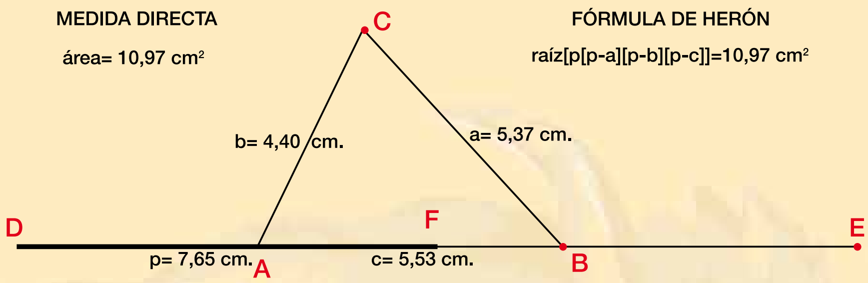
$\mathbf{p} = 5 + \frac{\mathbf{b}}{2}$, $\mathbf{p} - \mathbf{a} = \frac{\mathbf{b}}{2}$, $\mathbf{p} - \mathbf{b} = \frac{\mathbf{b}}{2}$ y $\mathbf{p} - \mathbf{c} = 5 - \frac{\mathbf{b}}{2}$

b) Sustituyendo en la fórmula de Herón $2 = \sqrt{\left(5+\frac{b}{2}\right)\frac{b}{2}\frac{b}{2}\left(5-\frac{b}{2}\right)}$ y operando se obtiene la ecuación que da las soluciones b=8 y b=6.

c) Tomando b=8, $\mathbf{p} = \frac{9+\mathbf{h}}{2}$, $\mathbf{p-a} = \frac{\mathbf{h}-1}{2}$, $\mathbf{p-b} = \frac{\mathbf{h}+1}{2}$ y $\mathbf{p-c} = \frac{9-\mathbf{h}}{2}$

Sustituyendo en la fórmula de Herón y operando se obtiene la ecuación $\mathbf{h}^4 - 82\mathbf{h}^2 + 657 = 0$ que da como solución válida h=3.

2.4. La solución con Cabri es: Modificando los lados del triángulo siempre se cumple la fórmula de Herón.



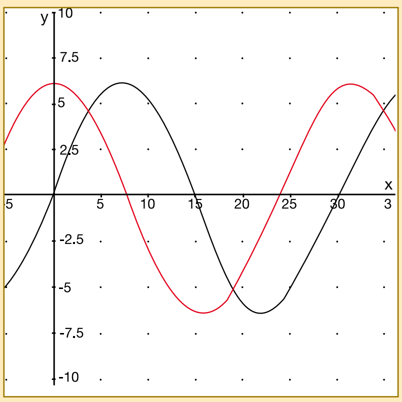
3. LOS ÁRABES Y EL AGUA: LA NORIA

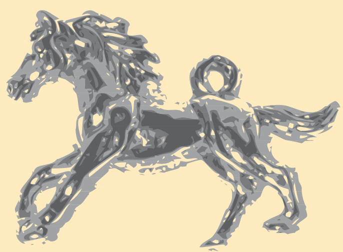
3.1. a) Al elegir ese sistema de referencia la ecuación es $x^2+y^2=6^2$.
b) Tomando el origen de ángulos propio de la trigonometría se tiene:

arcaduz	3	12	27	33
ángulo	30°	120°	270°	330°
x	5,20	-3	0	5,20
y	3	5,20	-6	-3

3.2. La altura es una función "seno" y la distancia una función "coseno" de amplitud 6 y período 0,30:

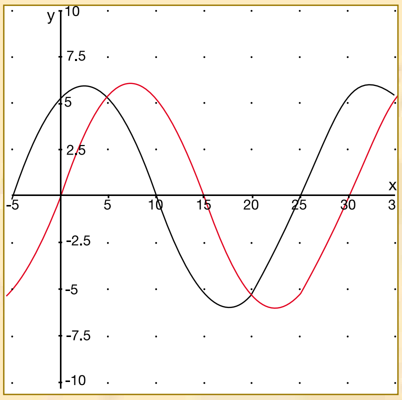
$\mathbf{h} = 6 \cdot \mathbf{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot \mathbf{t}}{30}\right)$ $\mathbf{d} = 6 \cdot \mathbf{cos}\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot \mathbf{t}}{30}\right)$

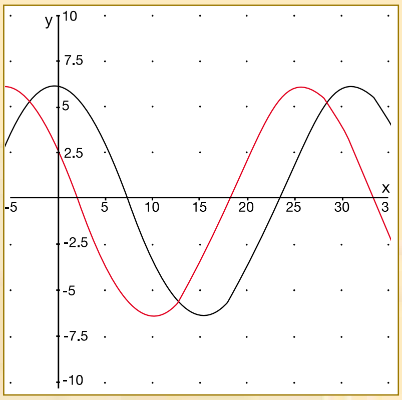




3.3. El arcaduz 6 tiene un “desfase” de 60°:

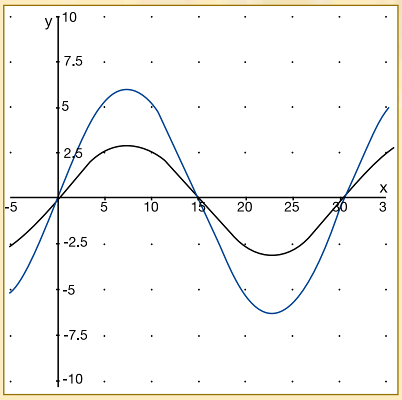
$$\mathbf{h} = 6\cdot\mathbf{sen}\left(\frac{2\cdot\pi\cdot\mathbf{t}}{30} + \frac{2\cdot\pi}{6}\right) \qquad \mathbf{d} = 6\cdot\mathbf{cos}\left(\frac{2\cdot\pi\cdot\mathbf{t}}{30} + \frac{2\cdot\pi}{6}\right)$$

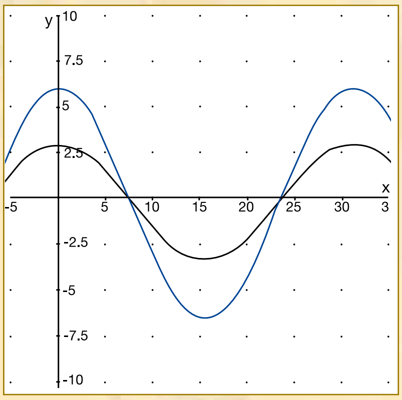


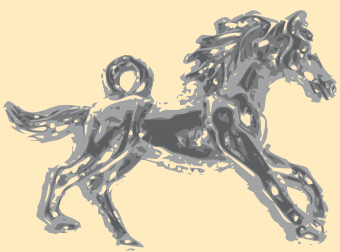


3.4. La noria de 6 m. de diámetro tiene una amplitud 3:

$$\mathbf{h} = 3\cdot\mathbf{sen}\left(\frac{2\cdot\pi\cdot\mathbf{t}}{30}\right) \qquad \mathbf{d} = 3\cdot\mathbf{cos}\left(\frac{2\cdot\pi\cdot\mathbf{t}}{30}\right)$$

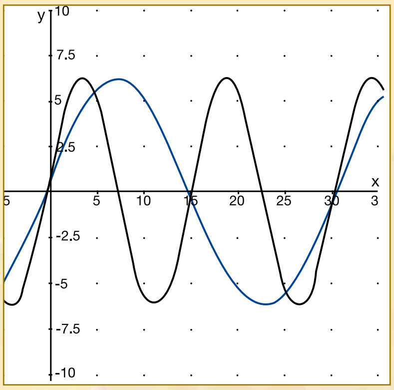


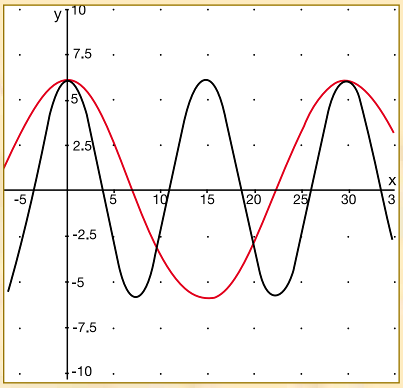




Si da una vuelta cada 15 s., su período es la mitad:

$\mathbf{h} = 6\cdot\mathbf{sen}\left(\frac{2\cdot\pi\cdot\mathbf{t}}{15}\right)$ $\mathbf{d} = 6\cdot\mathbf{cos}\left(\frac{2\cdot\pi\cdot\mathbf{t}}{15}\right)$





3.5. a) $\mathbf{V} = \pi\cdot\mathbf{R}^2\cdot\mathbf{H} = 3{,}14\cdot15^2\cdot30 = 21.206\ cm^3 = 21{,}206\ \mathbf{l}$

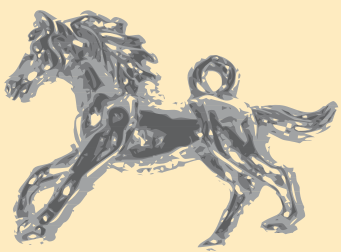
b) Se trata de un problema de optimización:

Si $\mathbf{V} = \pi\cdot\mathbf{R}^2\cdot\mathbf{H}$ [I] es el volumen del cilindro y $S = 2\pi\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{H} + \pi\cdot\mathbf{R}^2$ la superficie metálica se tiene: $\mathbf{S} = \frac{2\cdot\mathbf{V}}{R} + \pi\cdot\mathbf{R}^2$.

Derivando e igualando a cero: $\mathbf{R} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ y reemplazando en [I] se obtiene $\mathbf{H} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

La derivada segunda garantiza que es un mínimo: $\mathbf{S}'' = \frac{4\cdot\mathbf{V}}{R^3}$.

c) Con las dimensiones iniciales $\mathbf{S} = 2\cdot\pi\cdot15\cdot30 + \pi\cdot15^2 = 3.534{,}29\ cm^2$. de chapa. Pero si R=H y debe contener 21.206 cm^3 de agua, se tiene: $21.206 = \pi\cdot\mathbf{R}^3$ y R=H=18,90 cm. Por tanto $\mathbf{S} = 3\cdot\pi.\mathbf{R}^2 = 3.366{,}62\ cm^3$. Esto supone un ahorro de un 5%.



SOLUCIONES

3.6. Al dar dos vueltas por minuto y disponer de 36 arcaduces de 21,206 litros se tiene: 21,206·36·2=1.526,8 litros. Si se retiraran 12 arcaduces pero la duración del giro fuera 20 s. el resultado sería el mismo: 21,206·24·3=1.526,8 litros.

3.7. Se pretende que el alumno/a diseñe una noria teniendo en cuenta las variables que se indican. Deberá definir el tamaño del arcaduz, el número de arcaduces teniendo en cuenta el tamaño de la noria, etc.

4. JUAN CARAMUEL: INICIO DE LA PROBABILIDAD

4.1. Las sumas posibles son 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12. Las probabilidades de cada suceso son 1/36, 2/36, 3/36, 4/36, 5/36, 6/36, 5/36, 4/36, 3/36, 2/36 y 1/36 respectivamente.

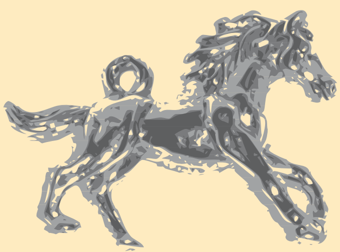
4.2. Al lanzar 3 dados hay 216 posibilidades. La suma 9 se presenta en los casos (1,2,6), (1,3,5), (1,4,4), (2,2,5), (2,3,4), (3,3,3) y la suma 10 en (1,3,6), (1,4,5), (2,2,6), (2,3,5), (2,4,4), (3,3,4). Esto supone 6 ternas para cada apuesta y aparentemente dos sucesos igualmente probables. Pero como las ternas con dos elementos iguales representan 3 casos y las de tres elementos diferentes a 6 casos dependiendo del dado, entonces p(9)=25/216 y p(10)=27/216.

4.3. Mediante el diagrama de árbol correspondiente:

En el caso (3,1): $\mathbf{p}(\mathbf{A})=\frac{1}{8}$ y $\mathbf{p}(\mathbf{B})=\frac{7}{8}$. Reparto 1:7.

En el caso (4,1): $\mathbf{p}(\mathbf{A})=\frac{1}{16}$ y $\mathbf{p}(\mathbf{B})=\frac{15}{16}$. Reparto 1:15.

En general (n,1): $\mathbf{p}(\mathbf{A})=\frac{1}{2^n}$ y $\mathbf{p}(\mathbf{B})=\frac{2^n-1}{2^n}$. Reparto $1:2^n-1$.



SOLUCIONES

4.4. Mediante el diagrama de árbol correspondiente:
En el caso (2,2) el reparto es 1:1 como es lógico.
En el caso (3,2) el reparto es 5:11.
En el caso (4,2) el reparto es 6:26 ó 3:13.

4.5. Mediante el diagrama de árbol correspondiente:
En el caso (2,1,1) el reparto es 4:4:1.
En el caso (2,2,1) el reparto es 5:5:17.

4.6. a) El jugador A ganará a la 1ª, 3ª, 5ª,... tirada:

$$p(A)=\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)+\ldots=\frac{1}{6}\left(1+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^4+\ldots\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{6}{11}$$

b) El jugador B ganará a la 2ª, 4ª, 6ª,... tirada:

$$p(B)=\frac{5}{6}\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)+\ldots=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^5+\ldots\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{\frac{5}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{5}{11}$$

Luego el reparto de la apuesta será 6:5.

4.7. Si analizamos la probabilidad del paso (1,2) --> (0,2) supone que Antonio ganaría si saliera 5 en la 1ª tirada, o en la segunda si en la primera no hubiera salido el 5 ni el 3 pues habría ganado Bernardo, y así sucesivamente:

$$p=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\ldots=\frac{1}{6}\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

Luego el paso (1,2) --> (1,1) tiene la misma probabilidad y la misma el paso (1,1) --> (1,0) o el paso (1,1) --> (0,1).

Por tanto es un caso idéntico al ejemplo de introducción, y en consecuencia el reparto ha de ser 3:1 y como han puesto 20.000 monedas, le corresponderían 15.000 monedas Antonio y 5.000 monedas a Bernardo. Hay que observar que si nos fijáramos en un reparto proporcional a las partidas ganadas o a las partidas que faltan para ganar la proporción sería 1:2.

5. HORCHATA DE CHUFA VALENCIANA

5.1. Sean x e y los días que tardaría cada tractor por separado, entonces planteamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{8}{\mathbf{x}} + \dfrac{8}{\mathbf{y}} = 1 \\[2ex] \dfrac{6}{\mathbf{x}} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$

El primer tractor tardará 12 días mientras que el segundo tardará 24 días.

5.2. Sean **x** e **y** los días que tardaría cada tractor por separado y **t** el tiempo que están los tractores trabajando simultáneamente, entonces planteamos el sistema:

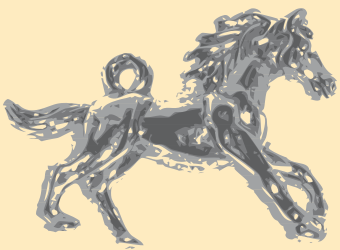
$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{3}{\mathbf{x}} + \dfrac{2}{\mathbf{y}} = \dfrac{11}{20} \\[2ex] \dfrac{\mathbf{t}+1}{\mathbf{x}} = \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{\mathbf{t}}{\mathbf{y}} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$

Si eliminamos el tiempo en las dos últimas ecuaciones, obtenemos el sistema formado por la primera ecuación y la ecuación: x-y=2.
El primer camión tardará 10 horas y 8 horas el segundo.

5.3. Si el porcentaje pedido: p
Producción del año inicial : x
Producción en el primer año: 1,05x
Producción en el segundo año: (1,05x)·1,08 = 1,134x
Producción en el tercer año:
(1,134x)·(1+p/100) = 1,134x+0,01134px
Planteamos la ecuación:

$$\frac{(1{,}05\mathbf{x} - \mathbf{x}) + (1{,}134\mathbf{x} - 1{,}05\mathbf{x}) + 1{,}134\mathbf{x} + 0{,}01134\mathbf{px} - 1{,}134\mathbf{x}}{3} = 0{,}1\mathbf{x}$$

Obteniéndose el 14,64%.



SOLUCIONES

5.4. Sea "x" la cantidad que toma del primer depósito y "100-x" la que toma del segundo. Entonces planteamos la ecuación:

$\frac{2}{13}\mathbf{x} + \frac{3}{10}(100 - \mathbf{x}) = 20$ y obtenemos 68,42 litros en el primer depósito y 31,52 litros en el segundo depósito.

6. RAMÓN LLULL Y LA COMBINATORIA

6.1. a) $C_{8,2} = 28$ b) $C_{8,3} = 56$

6.2. $C_{20,2} - 20 = 170$ (los 20 vértices se pueden unir de $C_{20,2}$ maneras para obtener las diagonales pero luego hay que restar a esta cantidad los vértices consecutivos ya que estos no forman diagonales sino los lados del polígono).

6.3. $C_{10,3}- C_{4,3} = 116$

6.4. $C_{7,4} = 35$

6.5. $C_{8,2} = 28$

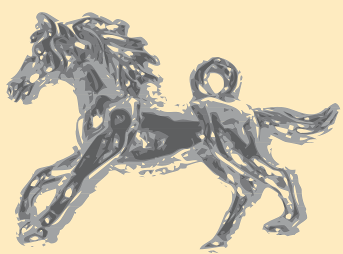
6.6. $C_{9,4} = 126$ (Sean A, B, C, D, E, F, G, H, I los 10 alumnos. Si separamos uno de ellos, por ejemplo el A, nos queda un conjunto de 9 elementos, de ese conjunto se pueden extraer $C_{9,4} = 126$ subconjuntos de 5 elementos. Cada uno de dichos subconjuntos define un subconjunto de 6 elementos: el que está integrado por los 5 elementos sobrantes).

6.7. $C_{9,6} = 84$

6.8. $C_{11,6} = 462$

6.9. $C_{8,6} = 28$

6.10. 128 ($C_{7,0} + C_{7,1} + C_{7,2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_{7,7} = (1+1)^7$



7. AL-QALASADI: EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

7.1. Se trata de completar la demostración.

7.2. $1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$

$$1^3 + 2^3 + \dots \mathbf{k}^3 + (\mathbf{k}+1)^3 = \left[\frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}+1)}{2}\right]^2 + (\mathbf{k}+1)^3 = \left[\frac{(\mathbf{k}+1)(\mathbf{k}+2)}{2}\right]^2$$

7.3. $\frac{1}{4\cdot 5} = \frac{1}{4\cdot 5}$

$$\frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \dots \frac{1}{(\mathbf{k}+3)(\mathbf{k}+4)} + \frac{1}{(\mathbf{k}+4)(\mathbf{k}+5)} = \frac{\mathbf{k}}{4(\mathbf{k}+4)} + \frac{1}{(\mathbf{k}+4)(\mathbf{k}+5)} = \frac{\mathbf{k}+1}{4(\mathbf{k}+5)}$$

7.4. $1\cdot 4 = 1(1+1)^2$

$1\cdot 4 + 2\cdot 7 + \dots \mathbf{k}(3\mathbf{k}+1) + (\mathbf{k}+1)(3(\mathbf{k}+1)+1) = \mathbf{k}(\mathbf{k}+1)^2 + (\mathbf{k}+1)(3\mathbf{k}+4) = (\mathbf{k}+1)(\mathbf{k}+2)^2$

8. LOS REPARTOS Y EL TALMUD

8.1.

$\mathbf{r}_1 = 100$

$\mathbf{r}_2 = 200$

$\mathbf{r}_3 = 300$ E= 300 $\sum \mathbf{r}_i = 600$

$\mathbf{P}_1 = \frac{100}{600}\cdot 300 = 50$

$\mathbf{P}_2 = \frac{200}{600}\cdot 300 = 100$

$\mathbf{P}_3 = \frac{300}{600}\cdot 300 = 150$

8.2. Regla Igualitaria

$\mathbf{r}_1 = 100$

$\mathbf{r}_2 = 200$

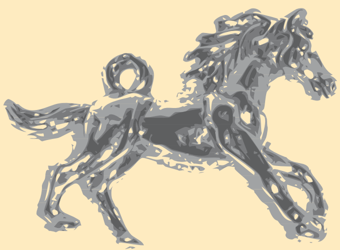
$\mathbf{r}_3 = 300$ E= 100

$I_1 = \frac{100}{3} = 33,\hat{3}$

$I_2 = \frac{100}{3} = 33,\hat{3}$

$I_3 = \frac{100}{3} = 33,\hat{3}$

A cada una le correspondería $33,\hat{3}$



8.3. Regla Igualitaria Restringida de pérdidas.

$\mathbf{r}_1$= 50

$\mathbf{r}_2$= 150

$\mathbf{r}_3$= 200 E= 100

•Calculamos lo que pierden entre los tres: (50+150+200)-100=300.
•Si lo reparten por igual entre los tres, pierde cada uno 300/3=100 = (posible).
•El primero no puede perder 100 porque es más de lo que le deben, entonces pierde 50 y lo descontamos de las pérdidas para calcular .
•Pérdidas = 350 – 100 = 250 las repartimos entre los otros dos =250/2= 125.

max(0; 50 –) + max(0; 150 –) + max(0; 200 –) = 100
0 + 25 + 75 = 100

Al primero le corresponde 0, al segundo 25 y al tercero 75.

8.4. Regla del Talmud

$\mathbf{r}_1$= 100

$\mathbf{r}_2$= 200

$\mathbf{r}_3$= 300 E= 200

100 + 200 + 300 = 600 $\frac{600}{2} = 300 \geq 200$

Supongamos que repartimos E entre los tres a partes iguales:

$\frac{200}{3} = 66,\hat{6}$ pero al primero le corresponde 50, luego recalculamos:
200 – 50 = 150; 150/2 = 75

$\mathbf{t}_1$= min(50;)= 50

$\mathbf{t}_2$= min(100;)= 75

$\mathbf{t}_3$= min(150;)= 75

9. LA BARRACA VALENCIANA

9.1.

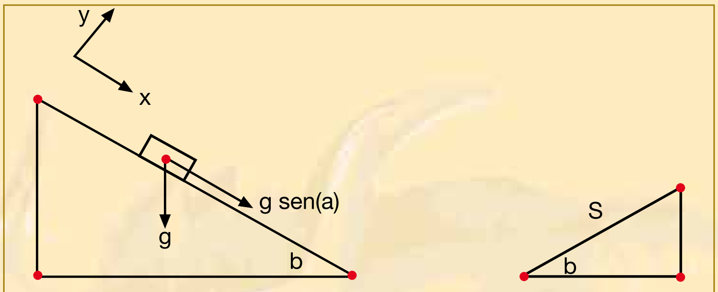


figura 1 figura 2

Sabemos que la distancia recorrida por un objeto que se mueve con movimiento uniformemente acelerado es: $s = s_o + v_o\mathbf{t} + \frac{1}{2}\mathbf{at}^2$

De la figura 2 se deduce que:

$$\cos \mathbf{b} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \qquad s = \frac{\mathbf{x}}{\cos\mathbf{b}}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior (y teniendo en cuenta que s_0 = o y v_0 = o) tenemos:

$$\frac{\mathbf{x}}{\cos b} = \frac{1}{2}\,\mathbf{g}\,\mathbf{t}^2\,\mathbf{sen(b)} \rightarrow 2x = g\,\mathbf{t}^2\,\text{sen}(b)\cos(b)$$

$$\rightarrow 2\mathbf{x} = g\,\mathbf{t}^2\,\frac{\mathbf{sen(2b)}}{2} \rightarrow 4\mathbf{x} = g\,\mathbf{t}^2\,\mathbf{sen}(2\mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{t} = \sqrt{\frac{4x}{gsen2b}}$$

Para que t sea mínimo, **g sen(2b)** debe ser lo más grande posible, lo cual sucede cuando **sen(2b)** = 1 y por tanto: 2b= 90° b = 45°.

9.2. a) r= 0,981. La relación es directa al ser r $\rightarrow$o.

b) y= 1,27x – 12,13.

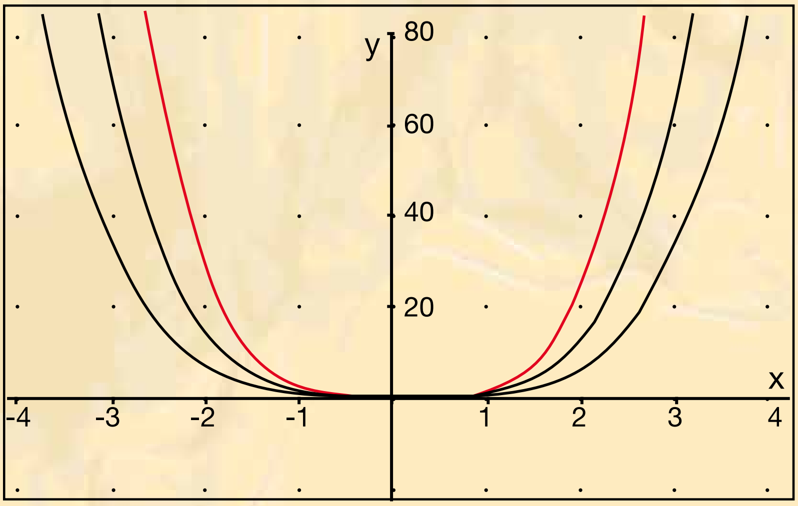
c) Cabe esperar una temperatura mínima de 15,81°C. Para una temperatura de 40°C el resultado que obtengamos no va a ser fiable ya que esa temperatura se aleja de las temperaturas dadas en la tabla.

d) La temperatura será de 21,3°C (en la ecuación de la recta de regresión de **y sobre x**, despejar la "x" y sustituir el valor de la "y").

9.3. Si llamamos "h" a la altura de la cruz y "d" a la distancia a la barraca se verifica: $\begin{cases} \mathbf{tg}(60) = \dfrac{500}{\mathbf{d}} \\ \mathbf{tg}(61{,}5) = \dfrac{500 + \mathbf{h}}{\mathbf{d}} \end{cases}$ de donde d= 2,89 m. y h= 31

10. LA CLEPSIDRA: RELOJ DE AGUA

10.1. Al aumentar el valor del parámetro la gráfica se "abre" la gráfica, es decir, crece más lentamente.



10.2. Vamos a expresar el volumen del cilindro en función de H.

Teniendo en cuenta que $R^2 = \dfrac{\sqrt{H}}{\sqrt{A}}$, sustituyendo en el volumen del cilindro

$\mathbf{V}_{\text{cilindro}} = \pi \cdot \sqrt{\dfrac{H}{A}} \cdot H = \dfrac{\pi}{\sqrt{A}} H^3$. Por tanto la relación es siempre $\dfrac{\mathbf{V}_{\text{clepsidra}}}{\mathbf{V}_{\text{cilindro}}} = \dfrac{2}{3}$.

10.3.

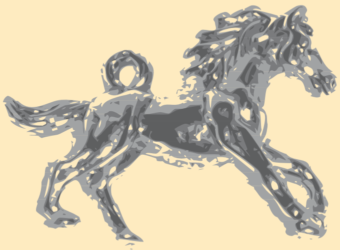
TIEMPO	ALTURA	RADIO	V.CLEPSIDRA	V.CILINDRO	PORCENTAJE	VARIACIÓN
	50 cm.	22,36 cm.	52,36 litros	78,54 litros	66,67%	
0 h	48 cm.	22,13 cm.	49,25 litros	73,87 litros	66,67%	-3,11 litros
1 h	46 cm.	21,90 cm.	46,20 litros	69,31 litros	66,67%	-3,05 litros
2 h	44 cm.	21,66 cm.	43,22 litros	64,84 litros	66,67%	-2,98 litros
3 h	42 cm.	21,41 cm.	40,31 litros	60,47 litros	66,67%	-2,91 litros
4 h	40 cm.	21,15 cm.	37,47 litros	56,20 litros	66,67%	-2,84 litros
5 h	38 cm.	20,88 cm.	34,69 litros	52,04 litros	66,67%	-2,77 litros
6 h	36 cm.	20,60 cm.	31,99 litros	47,98 litros	66,67%	-2,70 litros
7 h	34 cm.	20,31 cm.	29,36 litros	44,04 litros	66,67%	-2,63 litros
8 h	32 cm.	20,00 cm.	26,81 litros	40,21 litros	66,67%	-2,55 litros
9 h	30 cm.	19,68 cm.	24,33 litros	36,50 litros	66,67%	-2,47 litros
10 h	28 cm.	19,34 cm.	21,94 litros	32,91 litros	66,67%	-2,39 litros
11 h	26 cm.	18,99 cm.	19,63 litros	29,45 litros	66,67%	-2,31 litros
12 h	24 cm.	18,61 cm.	17,41 litros	26,12 litros	66,67%	-2,22 litros
13 h	22 cm.	18,21 cm.	15,28 litros	22,92 litros	66,67%	-2,13 litros
14 h	20 cm.	17,78 cm.	13,25 litros	19,87 litros	66,67%	-2,04 litros
15 h	18 cm.	17,32 cm.	11,31 litros	16,96 litros	66,67%	-1,94 litros
16 h	16 cm.	16,82 cm.	9,48 litros	14,22 litros	66,67%	-1,83 litros
17 h	14 cm.	16,27 cm.	7,76 litros	11,64 litros	66,67%	-1,72 litros
18 h	12 cm.	15,65 cm.	6,16 litros	9,23 litros	66,67%	-1,60 litros
19 h	10 cm.	14,95 cm.	4,68 litros	7,02 litros	66,67%	-1,47 litros
20 h	8 cm.	14,14 cm.	3,35 litros	5,03 litros	66,67%	-1,33 litros
21 h	6 cm.	13,16 cm.	2,18 litros	3,26 litros	66,67%	-1,17 litros
22 h	4 cm.	11,89 cm.	1,18 litros	1,78 litros	66,67%	-0,99 litros
23 h	2 cm.	10,00 cm.	0,42 litros	0,63 litros	66,67%	-0,77 litros
24 h	0 cm.	0,00 cm.	0,00 litros	0,00 litros		-0,42 litros

10.4. Como 24= k(48-0), se tiene k= 0,5 y t= 0,5(48-H).

10.5. a) Si $H=A\cdot R^4$ entonces $R=\sqrt[4]{\frac{H}{A}}$

b) Aplicando el cálculo integral para el cálculo de volúmenes de revolución:

$$V(H)=\pi\int_0^H R^2\cdot dH=\frac{\pi}{\sqrt{A}}\int_0^H\sqrt{H}\cdot dH=\frac{2\pi}{3\sqrt{A}}\sqrt{H^3}$$



APÉNDICE

Demostración de la fórmula t= k(H_0-H):

El caudal $Q=-\frac{dV}{dt}=-\frac{dV}{dH}\cdot\frac{dH}{dt}=-\frac{\pi}{\sqrt{A}}\sqrt{H}\frac{dH}{dt}$ siendo $V(H)=\frac{2\pi}{3\sqrt{A}}\sqrt{H^3}$. Por el teorema de Torricelli, la velocidad de salida del agua depende de la altura de la misma en el recipiente de acuerdo con la fórmula $V=\sqrt{2gH}$. Por tanto el caudal dependerá de la sección del orificio de salida (S) y de la velocidad (v):

Separando variables: $Q=S\sqrt{2gH}=-\frac{\pi}{\sqrt{A}}\sqrt{H}\frac{dH}{dt}$

$$dt=-\frac{\pi}{S\sqrt{2gA}}dH=-CdH$$

Integrando: $\int_0^t dt=-C\int_0^H dH$ se tiene **t** = **C**(**H**$_0$ – **H**) que indica que la velocidad de descenso del nivel del agua es constante.

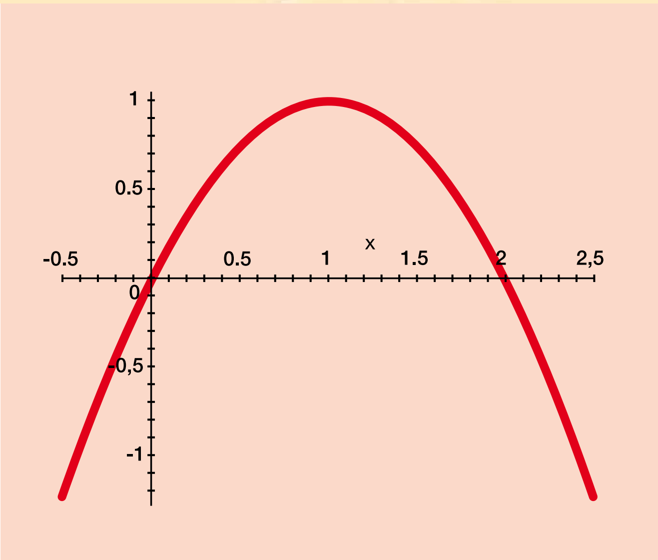
SOLUCIONES

1. LA CAJA DE ZEUS

Tomamos como x la longitud de la base de la caja.

1.1. $\mathbf{A(x)= x^2 + 2 \cdot x \cdot (1 - x)= -x^2 + 2x}$

1.2. Puntos de corte con los ejes: (0,0), (2,0)
Máximo: (1,1)
Intervalo de crecimiento: $(-\infty,1)$
Intervalo de decrecimiento: $(1, \infty)$
Función convexa



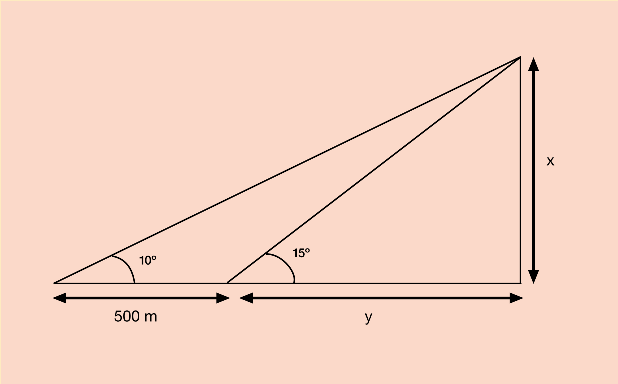
1.3. $\mathbf{V(x)= x \cdot x \cdot \left(\frac{1-x}{2}\right) = \frac{-x^3 + x^2}{2}}$, la función se hace máxima en $x = \frac{2}{3}$

2. TABLILLAS BARATAS

Tomamos como x la longitud del texto en horizontal
$\mathbf{A(x)= 8x + \frac{160}{x} + 72}$, el área se hace mínima para $\mathbf{x}= \sqrt{20}$

3. ANSIOSOS POR LLEGAR

3.1. El dibujo es una simulación



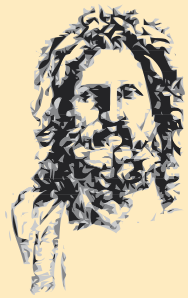
$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{tg}10^\circ = \dfrac{\mathbf{x}}{500+\mathbf{y}} \\ \mathbf{tg}15^\circ = \dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} \end{array}\right\} \quad \mathbf{x}= 257{,}83\ \mathbf{m.}\ \ \mathbf{y}= 962{,}25\ \mathbf{m.}$$

3.2. Tardarán en llegar 38,49 minutos, suponiendo que están en el segundo punto de medida del ángulo.

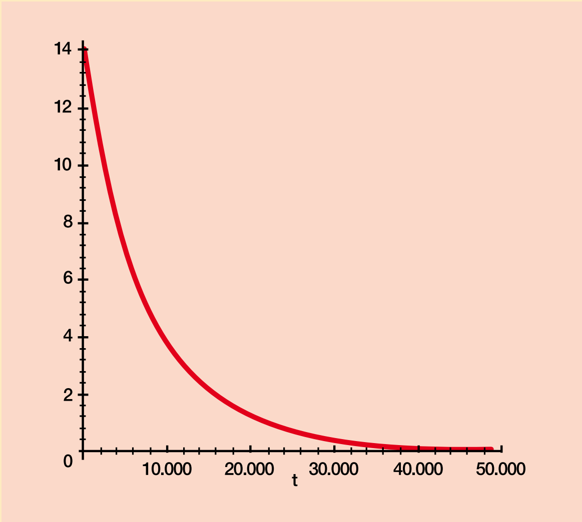
4. EL CARBONO 14

4.1. Para A= 8,94; t= 3.605. Suponiendo que estamos en el 2004, correspondería a un ser fallecido sobre el 1601 a.C., luego corresponde a la civilización minoica.

Para A= 9,40; t= 3.201,72. Suponiendo que estamos en el 2004, correspondería a un ser fallecido sobre el 1197,72 a.C., luego corresponde a la civilización micénica.



4.2.



5. LA ESFINGE

5.1.

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x-3}+9}{\sqrt{x+5}-4} = 1$

b) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{7x+1}-\sqrt{7x-1} = 0$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{tg(sen(senx))}{tg(senx)} = 1$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{2x^2} = \dfrac{1}{4}$

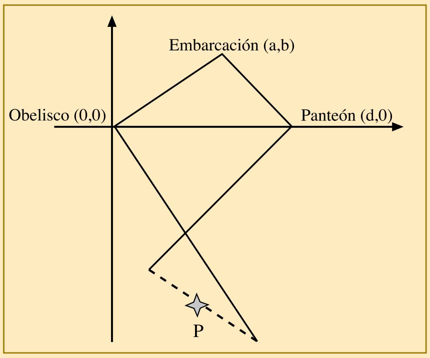
6. EL CABALLO DE TROYA

6.1. a) 1.596 saludos
b) Se podrán sentar de 725.760 maneras.
c) Se podrán sentar de 80.640 formas.

SOLUCIONES

7. ULISES EN LA ISLA DE AEA

Si se elige como sistema de referencia:



El punto donde se encuentran los compañeros de Ulises es $\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{d}}{2}, \frac{\mathbf{-d}}{2}\right)$, luego P es independiente de a y b c.q.d.

8. EL MINOTAURO

El camino recorrido por el minotauro después de x trayectos es $\mathbf{x}\cdot 2\cdot 50$. El camino recorrido por Doria después de y trayectos es $\mathbf{y}\cdot 50\cdot\sqrt{2}$. Si los igualamos para ver si en algún momento se cruzan llegamos a una contradicción.

9. SEDUCIENDO A LOS ARGONAUTAS

9.1. Por el teorema de la probabilidad total, P= 0,1759.

9.2. Por el teorema de la probabilidad compuesta, P= 0,2962.

9.3. Por el teorema de Bayes, P= 0,4736.

10. CIVILIZACIÓN EN LAS ISLAS GRIEGAS

10.1. Aplicando el teorema del coseno la distancia entre Melos y Naxos es de 120,72 km.

10.2. Aplicando el teorema del seno el ángulo que forman los puentes que unen Melos con Atenas y Melos con Naxos es de 86°.